論壇

損害保險需要에 관한 理論的 考察

洪 淳 球
(保險開發院 研究委員 · 經營學博士)

◀ 目 次 ▶

Ⅰ. 머리말

보험 자체의 역사에 비해 保險經濟學 理論은 상대적으로 아주 짧은 역사를 가지고 있다. von Neumann and Morgenstern(1944) 이후 未來의 危險과 不確實性이 정식으로 經濟學的인 分析模型에 도입된 이래 最適保險(Optimal Coverage of Insurance)에 관한 연구분야에서 期待效用假說은 현재까지 표준모형으로 사용되고 있다. 본고는 기대효용모형에 입각하여 보험계약자가 주어진 경제적 여건하에서 그가 직면해 있는 위험을 保險契約을 통해 어떤 行態로 행징하는가를 고찰하는데 그 목적이 있다.

개인은 일상생활에서 경제적 또는 금전적 손실을 가져올 수 있는 많은 危險에 직면하고 있다. 이러한 不確實性下에서 保險經濟學이 보험구매에 대한 의사결정을 하는데 있어 어떤 유용한 이론적 틀(framework)을 제공해 줄 수 있다면 그것은 미래에 발생가능한 모든 결과를 보험소비자가 가진 판단기준으로 비교할 수 있어야 할 것이다. 경제학에서 이러한 불확실성하에서의 意思決定 基準으로 크게 4가지, [1] 期待價値의 法則(Expected Value Rule), [2] 平均·分散模型 (Mean-Variance Model), [3] 確率支配原則(Stochastic Dominance

Principle), 그리고 [4] 期待效用假說(Expected Utility Hypothesis)이 연구·검토되어 왔다.

이 중에서 제일 먼저 고려해 보아야 할 이론적 틀은 期待價值極大化의 法則이다. 기대가치극대화란 평균적으로 기대되는 결과를 의사결정의 기준으로 하여, 여러 대안들 중 기대가치가 가장 큰 안을 선택한다는 것이다. 하지만 이 期待價值極大化의 基準은 다음의 聖 피터스버그의 역설(Saint Petersburg Paradox)이라는 실례에서 볼 수 있듯이 불확실성의 상황에서 개인의 의사결정 기준으로 적합하지 않다.

Daniel Bernoulli는 18세기 스위스의 수학자이고 물리학자인데, 한 때 Saint Petersburg에 있는 러시아 아카데미의 수학 교수로 재직한 바 있다고 한다.

베르누이는 다음과 같은 문제를 제기하였다.

> 동전 던지기의 게임에서 첫번째 시행에서 동전의 앞면이 나타나면 2달러를 받고 게임은 끝나고, 두번째 시행에 가서 앞면이 나타나면 (2^2)달러를 받고 게임이 끝난다. 이와 같이 앞면이 나타날 때까지 동전 던지기의 시행은 계속되며, 만일 n번째 시행에서야 비로소 동전의 앞면이 나타나게 되면 (n^2)달러를 받고 게임이 끝나게 된다고 하자. 그러면 이러한 게임에 참여하기 위하여 참가자가 지불하고자 하는 금액은 과연 얼마가 될 것인가 ?

St. Petersburg Paradox의 본질은 이 게임의 금전적 값어치를 기대값 기준으로 평가하는데서 발생하는 모순에 있다. 이 게임의 期待收益은 다음과 같이 구해진다.

성과 (outcome)	확 률	게임이 끝날 때까지의 시행횟수 (앞면 : H, 뒷면 : T)
2	$\frac{1}{2}$	H 1회
2^2	$(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})$	TH 2회
2^3	$(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}$	TTH 3회
⋮	⋮	⋮
2^n	$(\frac{1}{2})^{n-1}\times\frac{1}{2}$	T⋯TH n회
⋮	⋮	⋮

이 게임의 期待收益을 E라고 하면, 위 표에 의해 E는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E &= 2\frac{1}{2} + 2^2(\frac{1}{2}) + \cdots + 2^n(\frac{1}{2})^n + \cdots \\
&= 1 + 1 + 1 \cdots \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

이 게임의 기대수익이 무한대이므로 期待價值法則의 의사결정기준에 의하면, 게임에 참가 제안을 받은 사람은 무한대에 가까운 많은 참가비를 지불하고라도 반드시 참여해야만 한다. 그러나 본고를 읽고 있는 독자들이라면 얼마의 참가비를 지불하고 이 게임에 참여하고자 할까? 실제로 참가자들은 불과 몇달러 이상을 지불하려 하지 않을 것이다. 이와 같은 모순을 가리켜 성 피터스버그의 역설이라고 부르는데, 모순이 나타나는 이유는 기대가치에 의한 意思決定基準은 不確實性이 내포하는 위험을 고려하고 있지 않기 때문이다. 따라서 이러한 기대가치법칙은 위험을 기피하는 성향이 있는 일반 개인들의 경우에는 合理的인 意思決定 基準이 될 수 없다.

성 피터스버그 모순을 해결하기 위한 의사결정 기준으로 제시된 이론들이 確率支配原則, 平均·分散模型 그리고 期待効用假說이다. 確率支配原則은 위험회피형의 인간에게 적용될 수 있는 이론이다. 그러나 이 이론은 아주 제한된 분야에만 사용될 수 있는 의사결정기준으로 일반적인 분석의 틀로는 사용하기가 어렵다. 保險決定에 있어서도 두 대안 간의 명백한 선택기준을 제시해 주는 경우가 드물기 때문에 保險經濟學 分野에서는 거의 이용되지 않고 있다.[1)]

平均·分散模型은 의사결정 기준을 平均과 分散에 의해 단순화시키는 방안으로 사용이 편리하다는 장점이 있다. 그러나 평균·분산모형에 의한 의사결정이 이론적으로 합리성을 갖기 위해서는 보험계약자의 效用函數가 2차함수이거나 미래의 불확실한 富의 분포가 정규분포를 이루어야 한다는 결정적인 단점이 있다. 2차 효용함수는 효용함수의 가장 기본적 필수요건인 不飽滿性(Nonsatiation), 즉 富가 증가함에 따라 효용도 증가해야 한다는 不飽和 滿足性을 충족시키지 못한다. 또한 일반적인 사람들의 경제적 행위 기준과는 일치하지 않는 증가절대위험회피(Increasing Absolute Risk Aversion, 이하 IARA로 표기)의 성향을 나타내고 있어 현대 경제학의 표준가설인 非增加絶代危險回避(Non-increasing Absolute Risk Aversion), 즉 減少絶代危險回避(Decreasing Absolute Risk Aversion, 이하 DARA로 표기) 또는 恒常絶代危險回避(Constant Absolute Risk Aversion, 이하 CARA로 표기)와 상반되고 있다. 보험계약자 富의 정규분포에 대한 要件은 평균 분산모형을 保險經濟學 模型에 응용하는 데 있어 더욱 극복하기 어려운 난점으로 지적되고 있다. 보험사업자와는 달리 개개인 보험계약자에게 있어 위험에 대한 노출단위(Exposure Unit)는 충분히 분산(well-diversified) 되어 있지 않기 때문에 定規分布의 가정은 현실성을 갖기 어렵다. 예를 들면 도난 위험의 경우는 일단 손실이 발생하면 부분손실의 경우는 없고 全損失이 된다. 또한 일반적인 손해보험의 대상이 되는 財產 및 賠償責任危險에는 손실발생의 확률도 있지만 손실이 발생하지 않을 확률도 무시할 수 없다. 이런 경우 위험에 대한 記述을 정규분포와 같이 하나의 連續確率密度函數로 표현하는 것은 아주 제한적인 경우에만 가능하다.[2)]

期待價值에 판단근거를 둘 경우 발생하는 St. Petersburg의 역설적 문제점을 해결하려는 노력이 Bernoulli등에 의해서도 시도되었는 데 그들이 해결책으로 제시한 것이 效用槪念의 도입이었다. 즉, 사람들은 경제적 선택행위를 하는 데 있어 의사결정의 기준을 수익 그 자체보다는 수익이 가져다 주는 만족도인 效用에 둔다는 것이다. 예를 들면 Gabriel Cramer는 $u(w)=w^{0.5}$라는 無理效用函數를 도입하여 기대수익대신 기대효용기준으로 아래와 같이 Saint Petersburg의 모순의 해결책을 제시하였다.[3)]

1) 이 분야에 관심이 있는 독자는 Bawa(1982)를 참고하기 바람
2) Smith(1968) 또는 Gould(1969)에 의해 지적되었듯이, 재산 재해위험을 정규분포와 같은 하나의 연속확률밀도함수로 표현하면 항상 손실이 발생한다는 가정하에 그 손실액의 크기만이 위험으로 나타난 것이다. 즉 이 경우 손실이 발생하지 않을 확률(즉, Probability of No Loss)은 零이다.
3) 효용함수 $u(w)=w^{0.5}$는 아래와 같이 바람직한 효용함수의 조건을 만족시킨다.
(1) 불포만성 : $u'(w)=0.5w^{-0.5}>0$;

성과	확 률	효 용
2	$\frac{1}{2}$	$(2)^{0.5}$
2^2	$(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})$	$(2^2)^{0.5}$
2^3	$(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}$	$(2^3)^{0.5}$
⋮	⋮	⋮
2^n	$(\frac{1}{2})^{n-1}\times\frac{1}{2}$	$(2^n)^{0.5}$
⋮	⋮	⋮

위 표에 의해 이 게임의 期待効用 E_U는 아래와 같이 구해진다.

$$E_U = (2)^{0.5}\cdot\frac{1}{2} + (2^2)^{0.5}\cdot(\frac{1}{2})^2 + \cdots + (2^n)^{0.5}\cdot(\frac{1}{2})^n + \cdots = 2.414$$

따라서 이게임의 기대효용값인 2.414와 동일한 효용을 가져다 주는 금액을 X라고 하면

$$u(X) = X^{0.5} = 2.414$$

이므로 X=5.828달러가 된다. 즉, 위험을 고려하지 않는 期待價値極大化의 기준으로는 전 재산을 걸고라도 성 피터스버그 게임에 참여해야만 하지만, 게임에 내포되어 있는 위험이 고려되는 期待効用極大化의 기준으로 판단하면 $u(w)=w^{0.5}$라는 効用函數를 가진 사람의 경우 이 게임에 참가하는 경비로 최대한 6달러 이상을 지불하지 않는다는 것이다.

위와같은 効用理論을 발전시켜, 보다 일반적인 불확실성 상황하에서 합리적인 선택의 체계를 제공하는 대표적인 이론이 von Neumann-Morgenstern(1944)에 의해 제시된 期待効用假說이다. 본고에서는 이 기대효용이론을 사용하여 보험수요모형을 설정하고 그것에 의해 보험계약자의 最適保險水準을 분석할 것이다. 損失發生의 危險과 손실발생시 실현가능한 損失深度 危險과의 복합적 불확실성하에서 보험수요자가 위험관리의 방안으로 보험이라는 제도를 어떻게 이용할 것인가를 이론적인 측면에서 분석하는데 본고의 일차적인 목적이 있다.

II. 模型의 展開

본장은 전형적인 保險契約者의 經濟行爲를 구체화시켜 주는데 필요한 기본적 가정과 분석모형에 대해 서술한다.

1. 使用記號

먼저 分析模型에 사용되는 변수를 다음과 같이 정의한다.

w ≡ 보험계약자가 소지하고 있는 원래의 富;

r_f≡ 무위험자산의 수익률 또는 이자율;

R_F≡ $1+r_f$;

q ≡ 재산·배상책임 손실이 발생할 확률;

h ≡ 損失 頻度(loss frequency)에 대한 위험을 나타내 주는 랜덤 변수. 확률$(1-q)$의 값으로 h=0, 확률 q의 값으로 h=1;

L ≡ 損失 深度(loss severity)를 나타내 주는 랜

(2) 위험회피 : $u''(w) = -0.25w^{-0.5} < 0$;

(3) 비증가 절대위험회피 : $\frac{\partial}{\partial w}[-\frac{u''(w)}{u'(w)}] = \frac{\partial}{\partial w}0.5w^{-1} = -0.5w^{-2} < 0.$

덤변수, $0<L<\infty$;

$f(L)\equiv L$에 대한 확률밀도 함수;

$F(L)\equiv L$에 대한 확률분포 함수;

$b\equiv$비례적 보험계약(Proportionate Coinsurance Contract)에서 부분보험계수 (Coinsurance Coefficient)로 그 범위는 $0\leq b\leq 1$. 즉, $b=0$ 이면 無保險 狀態이고 $b=1$ 이면 完全保險(Full Coverage of Insurance)으로 발생가능한 미래의 손실에 대해 100% 보험을 사는 것임. 또한, $0<b<1$이면 직면한 위험의 일부만을 보험회사로 이전시키는 部分保險(Partial Coverage of Insurance) 계약을 의미함;

$P\equiv$완전보험을 살 때의 보험료;

$bP\equiv$비례적 보험계약에서 부분보험계수가 b일 때의 보험료;

$Y\equiv$보험계약자가 소지하게 되는 기간 말의 富;

$Y_0\equiv$손실이 발생하지 않았을 경우에 보험계약자가 소지하게 되는 기간 말의 富. 확률 $(1-q)$의 값으로 $Y=Y_0$;

$Y_1\equiv$손실이 발생했을 경우에 보험계약자가 소지하게 되는 기간말의 富. 확률 q의 값으로 $Y=Y_1$.

2. 分析模型

보험계약자는 von Neumann-Morgenstern(1944) 개념에 입각한 危險回避型 效用函數의 기대값 극대화를 목표로 의사결정을 하고, 保險期間은 단일기간을 가정한다. 초기의 富(Initial Wealth) w를 소지한 보험계약자는 현시점(시점 0)에서 미래(시점 1)에 발생할 수있는 손실액, 즉 財産·賠償責任의 危險을 감소 내지는 제거시켜 주는 역할을 하는 보험을 구매할 것인가를 결정하고, 또 구매한다면 얼만큼의 보험을 구매할 것인가를 결정한다. 保險契約形態는 비례적 부분보험을 가정하여, 보험계약자가 $b(0\leq b\leq 1)$[4] 만큼의 보험을 bP의 보험료로 구입하면 보험계약자의 잔여 富인 $(w-bP)$는 저축에 이용된다.[5] 보험은 미리 지급한 보험료에 의해 미래에 발생가능한 손실로 부터 보호받는 계약이다. 따라서 일반적으로 보험금의 지급시기와 손실보상의 시기와는 시간적 차이가 존재하고, 보험사업자의 입장에서 미리 받은 보험료는 금융기관에 예치되어 이자소득을 발생케 한다. 마찬가지로 保險需要模型에도 市場利子率을 도입하면 均衡保險料 槪念에 이자소득에 대한 機會費用이 명백히 반영될 수 있다. 본 모형에서 재산 및 배상책임위험이 보험구매수요에 결정적인 역할을

4) 여기서 보험계약자는 보험을 공급하는 보험회사가 될 수 없음을 가정하여 보험계수 b는 陰의 값이 될 수 없음에 유의해야한다.

5) 이 논문에서 정의된 보험계약은 Coinsurance 형태이다. Coinsurance와 Deductible조항은 실제의 보험시장에서 가장 광범위하게 사용되는 부분보험(Partial Insurance)의 계약형태이다. 이 논문에서 Deductible 계약 대신 Coinsurance 계약을 채택한 이유는 보험계약자가 보험회사와 위험을 분담하는 장치(Risk Sharing Arrangement)로써 Coinsurance 계약의 우월성 때문이다. Borch(1983)에 의해서 주장된 바와 같이, 보험회사가 위험중립적(Risk Neutral)일 때 Deductible 계약은 위험부담(Risk Bearing)의 이론을 전개하는데 적절하지 않다. Deductible 계약은 근소한 손실을 檢索하고 보상하는데 드는 비용을 절감시킬 수 있는 실제적 방안으로 간주하여야 할 것이다. 더우기, Mossin(1968)과 Schlesinger(1981)에 의해 규명되었듯이, Deductible 계약은 기대효용극대화의 모형에서 최적보험을 위한 2차조건(Second Order Condition)이 충족되기가 쉽지 않다.

하지만 보험료의 기회비용을 대변해 주는 市場利子率도 보험구매결정에 영향을 주는 변수로 작용할 것임에 유의하자.

미래시점인 시점 1에서 모든 不確實性은 실현된다. 손실이 발생하지 않을 경우 보험계약자의 미래의 富는 $(w-bP)R_F$가 될 것이며, 손실이 발생할 경우 그의 미래의 부는 $(w-bP)R_F-L+bL$ 이 될 것이다. 여기서 L은 실제손해액을 나타내는 랜덤변수이고, bL은 b만큼의 보험을 산 것에 대한 보험회사의 보험지급금액을 나타낸다. 따라서 기간말의 보험계약자 富는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$(1)\quad Y=\begin{cases} Y_0=(w-bP)R_F \\ \quad (Y=Y_0\text{가 될 확률은 } 1-q), \\ \text{또는} \\ Y_1=(w-bP)R_F-(1-b)L \\ \quad (Y=Y_1\text{ 이 될 확률은 } q). \end{cases}$$

식 (1)을 간단히 아래의 식 (2)와 같이 표기할 수 있다.

$$(2)\qquad Y=(w-bP)R_F-h(1-b)L.$$

식 (2)에서 h는 L과는 독립되어 損失頻度를 나타내는 랜덤변수인데 본 모형에서는 확률 $1-q$로 $h=0$이 되거나 또는 확률 q로 $h=1$의 값을 갖는다. 따라서 본 모형에서 보험계약자의 總損失에 대한 確率分布는 損失頻度의 確率分布와 損失深度의 確率分布가 결합(convolution)된 형태를 갖고, 손실심도에 대한 확률분포는 손실이 실제로 발생했을 경우에만 $(h=1)$ 손실액의 크기를 나타내주는 條件附 確率分布를 가진다. 물론 보험계약으로 移轉이 가능한 위험은 손실심도에 대한 위험이다. 이같은 손실빈도와 손실심도를 결합시킨 乘數形態(multiplicative type)의 총손실 분포는 본모형을 단일 랜덤변수의 모형보다 더욱 현실에 접근시켜 줄 것이다.

이 단계에서 保險料에 대한 개념을 명확히 할 필요가 있다. 전술한 바와 같이, 본 모형에서 전체적인 財産 및 賠償責任의 危險은 손실빈도와 손실심도의 위험이 결합된 형태임을 고려하고, 아울러 保險料 支給時期와 保險支給金 賠償時期와의 시간적 차이에 대한 이자율을 고려하면, 완전보험$(b=1)$의 경우 보험증권의 保險計理的 價値(Actuarial Value of Insurance Policy)인 純保險料는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{R_F}q\int_{L=0}^{\infty}Lf(L)dL=\frac{1}{R_F}qE(L),$$

여기서 E는 期待値를 나타내는 연산부호이다. 즉 $qE(L)$은 기간말에 일어날 수 있는 손실에 대해서 손실심도와 손실빈도의 위험을 함께 고려한 豫定損害費用이고, $\frac{1}{R_F}qE(L)$은 시장이자율을 할인율로 적용한 기간 말의 예정손해비용에 대한 現價이다. 현실 보험시장에서 부과되는 보험료 P는 순보험료 $\frac{1}{R_F}qE(L)$보다 큰 것이 일반적이다. 보험료와 순보험료와의 차액(즉, $P-\frac{1}{R_F}qE(L)$)이 총보험료 P에서 附加保險料(insurance loading)에 해당되는 부분이다. 이 附加保險料의 개념에는 보험사가 보험계약에 필요한 경비와 함께 보험회사가 보험계약자의 위험을 분담하는 것에 대한 보상도 포함하고 있다. 이 부가보험료의 크기는 保險市場의 구조에 의해 그리고 정부의 규제에 의해 總營業保險料 또는 保險加入金額에 대한 비

율로 그 부과한도가 정해지는 것이 보통이다. 본 모형에서 사용되는 보험료 P는 純保險料와 附加保險料를 아래와 같이 포함하고있다.

$$P=(1+\lambda)\frac{1}{R_F}qE(L),\ \lambda\geq 0$$

여기서 λ는 부가보험료 요인(loading factor)으로 $\lambda\frac{1}{R_F}qE(L)$은 附加保險料를 뜻한다. 따라서 비례적 부분보험계약에서 부분보험 $b(0\leq b\leq 1)$만큼 계약한 보험증권의 보험료 bP는 아래와 같다.

$$bP=b(1+\lambda)\frac{1}{R_F}qE(L)$$

상기한 사실에 기초하여 保險需要者가 最適保險水準을 선택하기 위한 기대효용모형을 설정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(3)\ Max\,E[u(Y)]&=(1-q)u[(w-bP)R_F]\\&\quad+q\int u[(w-bP)R_F-(1-b)L]\,dF\\&=(1-q)u(Y_0)+qE[u(Y_1)]\\&=H(b).\end{aligned}$$

여기서 u는 $u'>0$ 인 불포만성과 $u''<0$인 위험회피의 성격을 가진 效用函數이다. 위의 식 (3)에서 期待效用을 극대화시키는 최적보험량 b를 구할 수 있다. 이를 위해 필요한 1차 조건(First Order Condition)은 아래의 식 (4)를 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned}(4)\ H'(b)&=(1-q)(-PR_F)u'(Y_0)\\&\quad+qE[u'(Y_1)(-PR_F+L)]=0.\end{aligned}$$

또한 식 (4)에 구한 b값이 期待效用을 극대화시키는 최적값(Optimal Coverage of Insurance)이 되기 위해서는 2차조건(Second Order Condition)이 陰의 부호를 가져야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}(5)\ H''(b)&=(1-q)(-PR_F)^2u''(Y_0)\\&\quad+qE[u''(Y_1)(-PR_F+L)^2]<0.\end{aligned}$$

그런데 식 (5)에서 危險回避에 의해 $u''(Y)<0$이기 때문에 $H''(b)<0$ 이 되어 자동적으로 2차 조건을 만족시킨다. 따라서 식 (4)에서 구한 최적값 $b(0\leq b\leq 1)$는 기대효용을 극대화시키는 最適保險水準이 된다.

Ⅲ. 最適保險需要

1. 附加保險料가 없을 경우－完全保險

본장에서는 먼저 이론전개의 시발점으로 보험료가 純保險料만으로 책정된 경우, 즉 보험료에 附加保險料가 포함되지 않은 경우의 最適保險需要를 고찰해 보기로 한다.

〈定理 1〉

보험료가 순보험료만으로 구성되어 있으면 보험계약자는 언제나 완전보험을 산다. 즉,

$$P=\frac{1}{R_F}qE(L)\Leftrightarrow b=1.$$

〈증명〉 식 (4)에서 $b=1$ 이면 完全保險으로 보험계약자는 그가 직면한 모든 財産·賠償責任危險을 보험회사에 전가시키는 경우이다. $b=1$이면 $Y_0=Y_1=Y=(w-P)R_F$가 되어 Y는 랜덤변수가 아닌 상수가 된다. 이 경우 식 (4)는 아래의 식 (6)와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$(6)\ H'(1)=(-PR_F+qE(L))u'(Y).$$

식 (6)에서 $u'(Y)>0$ 이므로 $H'(1)=0$

즉, 完全保險이 最適保險이 되는 필요충분조건은 $P=\frac{1}{R_F}qE(L)$이다. Q.E.D.

베르누이 원칙(Bernoulli Principle)이라고 알려진 이 定理는 保險經濟學에서 대단히 중요한 의미를 가진다. 보험료가 부가보험료를 포함하지 않고 純保險料만으로 구성되면 모든 이성적인 보험계약자는 完全保險을 구매하여 그가 가진 모든 위험을 보험회사로 이전시킨다는 것이다. 베르누이 원칙은 보험이라는 危險管理方案에 대해 강력한 이론적 타당성을 부여해주고 있다.

이러한 베르누이 정리가 성립하는 이유를 기간 말 富의 確率分布에 대한 관점에서 분석하면 직관적인 설명이 가능하다. 보험료에 附加保險料가 포함되어 있지 않은 경우 (즉, $P=qE(L)/R_F$) 보험수요자의 기간말 평균 富는 다음 식에서 볼 수 있는 바와 같이 보험구매량 b로부터 독립되어 있다.

$$E(Y)=wR_F-qE(L).$$

그러나 기간 말 부의 분포의 2차 이상의 모멘트(Moment)들은 보험구매량 b에 영향을 받는다. 예를 들면, 보험수요자의 기간 말 富의 분산은 다음과 같이 나타난다.

$$Var(Y)=q^2(1-b)^2Var(L).$$

이 경우 $b=1$, 즉 보험계약자가 완전보험을 계약했을 경우 부의 분산은 零이 되고, 부분보험($0\leq b<1$)을 계약했을 경우 부의 분산은 항상 陽의 값이 됨을 알 수 있다. 따라서 이성적인 보험계약자라면 같은 기대값을 유지하면서 위험(즉, 부의 분산)을 완전히 제거시켜 주는 完全保險을 선호할 것이다.[6]

이는 보다 일반적으로 Rothschild and Stiglitz (1970)에 의해 정의된 平均保有擴散(Mean Preserving Spread)의 개념을 사용하여 설명할 수 있다. 기간 말의 부 Y를 보험구매량 b의 함수, $Y(b)$로 나타내면, $Y(b)$는 $Y(1)$을 사용하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y(b)&=(w-P)R_F+(1-b)(PR_F-hL) \\ &=Y(1)+(1-b)(PR_F-hL). \end{aligned}$$

위의 식에서 附加保險料가 없을 경우 $P=qE(L)/R_F$이므로 $(PR_F-hL)=Z$로 놓으면 $E(Z)=0$이 된다. 따라서 부분보험($0\leq b<1$)을 구매하는 경우 부의 분포는, 완전보험($b=1$)을 구매하는 것에 비해, $(1-b)Z$라는 추가적인 노이즈(Noise)가 존재하게 되므로 $Y(b)$의 분포는 $Y(1)$의 평균보유확산이 되고 항상 다음이 성립한다.

$$u(Y(1))>E[u(Y(b))]$$

2. 附加保險料가 있을경우

베르누이 원칙은 保險需要를 이론적으로 규명하는 데 유용한 시발점이 되고 있으나 실제 보험시장에서 보험료는 부가보험료를 포함하고 있다. 본 절에서는 부가보험료를 포함하고 있는 보험료의 구조하에서 最適保險選擇에 관한 期待效用理論을 전개하고자 한다.

(1) 部分保險

본절의 첫번째 과제는 베르누이 원칙의 推論으

6) 엄격히 말하면, 분산이 위험의 척도로서 완전한 역할을 하기위해서는 효용함수가 2차함수이거나 부의 분포가 정규분포를 이루어야 한다.

로 附加保險料가 존재하는 경우에도 과연 保險需要者는 보험을 살 것인가에 대한 답을 이론적으로 규명해 보는 데 있다.

〈定理 2〉

보험료가 순보험료와 부가보험료로 구성되어 있으면 보험계약자는 언제나 부분보험을 산다. 즉,

$$P > \frac{1}{R_F} qE(L) \Leftrightarrow 0 \leq b < 1.$$

〈증명〉 식 (6)에서 $H(1)<0$ 즉 부분보험이 최적보험이 되는 필요충분조건은 $P > \frac{1}{R_F} qE(L)$, 즉 보험료가 순보험료 이외에 부가보험료를 포함하는 것이다. Q.E.D.

定理1과 定理2는 보험시장 존재 근거에 강력한 타당성을 부여해 주고 있다. 보험료에 附加保險料가 포함되는 현실 보험업계에서, 부과보험료가 과도하지만 않으면 보험계약자는 그가 직면해 있는 危險을 보험회사와 나누어 분담하는 것이 最適이다.

(2) 超過保險

보험료가 保險證券의 保險計理的 價値보다 큰 경우($P > \frac{1}{R_F} qE(L)$), 식 (6)에서 초과보험(Overinsurance, 즉 $b>1$이 되는 경우)은 보험이라기보다는 도박에 준하는 계약으로 보험계약자의 危險回避 性向에 의해 最適保險에서 자동적으로 제외된다.

(3) 無保險

식 (6)에서 無保險 즉 $b=0$이 최적상태가 되는 경우는 보험료 P가 아래의 식 (7)에서 정의되는 $\overline{P}$ 일 경우이다.

$$(7)\ H'(0) = -\overline{P}R_F(1-q)u'(wR_F) + qE[(-\overline{P}R_F+L)u'(wR_F-L)] = 0.$$

알기 쉬운 설명을 위해 식 (7)은 동등한 결과를 갖는 아래의 식 (8)와 같이 표현할 수 있다.[7)]

7) Borch(1986)의 방법을 이용하면, 식 (7)과 (8)의 동등성은 다음과 같이 증명할 수 있다. $K(L)$을 아래와 같이 정의하면

$$(7.1)\ K(L) = (hL-PR_F)[u(wR_F-hL)-u((w-P)R_F)],$$

식 (7.1)에서 Max $K(L)$을 위한 1차 조건은 식 (7.2)와 같다.

$$(7.2)\ K'(L) = u(wR_F-hL)-u((w-P)R_F)+(hL-PR_F)u'(wR_F-hL)=0$$

$K''(L)<0$이므로 식 (7.1)에서 K는 $K'(L)=0$ 을 만족하는 L에서 극대화된다. 식 (7.2)을 앞에서 정의된 h에 대해 기대치를 구하면

$$(7.3)\ (1-q)[u(wR_F)-u((w-P)R_F)-PR_Fu'(wR_F)]+q[u(wR_F-L)-u((w-P)R_F)+(L-PR_F)u'(wR_F-L)]=0$$

이 된다. 식 (7.3)에서 양변에 $f(L)$을 곱한 다음 적분을 취하면

$$(7.4)\ u((w-P)R_F)-(1-q)u(wR_F)-qE[u(wR_F-L)] = -(1-q)PR_Fu'(wR_F)+qE[(L-PR_F)u'(wR_F-L)]$$

가 된다. 식 (7.4)에서 우변은 식 (7)에 의해 0이 되므로 식 (7.3)은 식 (8)이 된다. 따라서 식 (7)과 식 (8)는 동등한 표현임을 알 수 있다.

(8) $u[(w-\overline{P})R_F]=E[u(wR_F-hL)]$
$=(1-q)u(wR_F)+qE[u(wR_F-L)].$

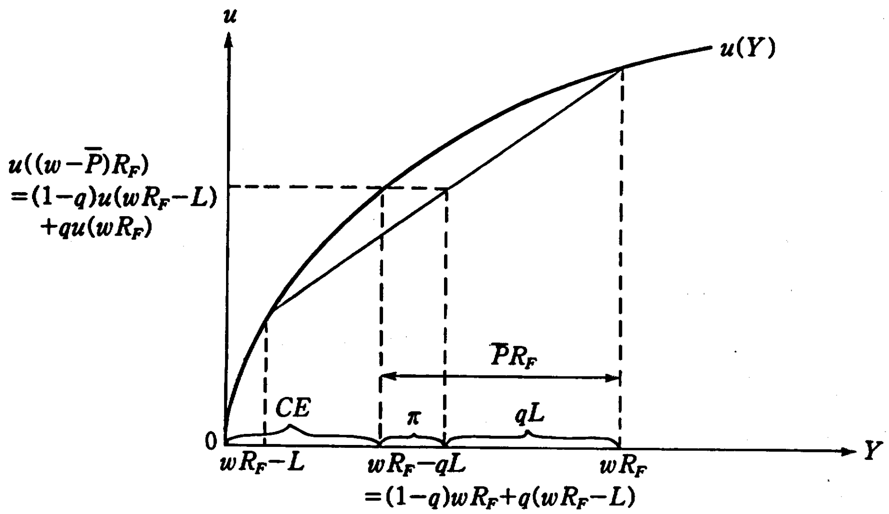
식 (8)의 우변은 보험에 안드는 경우 ($b=0$)의 期待效用이므로, 식 (8)의 좌변에서 정의된 보험료 $\overline{P}$는 보험계약자가 完全保險을 샀을 경우와 보험을 전혀 사지 않았을 경우의 보험계약자의 효용을 같게 해 주는, 즉 보험계약자가 보험을 사는데 지급할 수 있는 최대한도의 보험료를 말한다.[8] 따라서 보험료 P가 $\overline{P}$보다 큰 경우는 보험을 샀을 때 오히려 보험계약자의 효용이 감소함을 명백히 알 수 있다.

이 경우, 이해의 편의를 도모하기 위하여 그림으로 분석해 볼 수 있다. 그림에서 나타낼 수 있도록 L이 $(0, w)$범위의 한 상수라고 하면, 식 (8)은

$$u[(w-\overline{P})R_F]=(1-q)u(wR_F)+qu(wR_F-L)$$

이 되고 이 관계는 아래의 그림처럼 도식화하여 나타낼 수 있다.

〈그림〉 보험구입이 가능한 최대한도의 보험료



qL≡손실에 대한 예정손해비용 ;
π≡위험 프리미엄 ;
CE≡$Y(=wR_F-hL)$에 대한 확실성 등가 (Certainty equivalent), 즉 $E(Y)-\pi$;

$\overline{P}$≡보험계약자가 지불할 수 있는 최대한도의 보험료로 예정손해비용에 위험프리미엄을 합한 값, 즉 $\overline{P}=qL+\pi$.

8) 또한 식 (8)은 역함수를 이용하여 보험료를 아래와 같이 명시적으로 표현할 수 있다.
$\overline{P}=w-\frac{1}{R_F}u^{-1}[(1-q)u(wR_F)+qE(u(R_F-L))]$.
여기서 u^{-1}은 u의 역함수를 나타낸다.

(4) 均衡保險料

지금부터 이 논문의 전 구간에 결쳐 보험료는 $\frac{1}{R_F}qE(L)<P<\bar{P}$ 라는 범위를 가정한다.

즉, 보험료에는 附加保險料가 포함되어 있으며 그 부과보험료는 無保險狀態를 유발할 만큼 과도하지는 않은 것으로 가정한다. 이같이 주어진 보험료 구조하에서 最適保險을 위한 1차조건인 식 (4)는 아래의 식 (9)로 표현될 수 있다.

$$(9)\ PR_F[(1-q)u'(Y_0)+qE(u'(Y_1))] =qE[u'(Y_1)L].$$

식 (9)의 좌변에서 P는 한 단위의 보험을 사는데 드는 한계비용으로 간주할 수 있고(즉, $\frac{\partial}{\partial b}(bP)=P$), 좌변의 두번째 항인 $(1-q)u(Y_0)+qE[u'(Y_1)]$은 기간말의 富에 대한 限界期待效用(즉, $\frac{\partial}{\partial Y}E[u(Y)]=(1-q)u(Y_0)+qE[u'(Y_1)]$)을 뜻한다. 따라서 식 (9)의 좌변은 보험계약자가 보험으로 위험을 轉嫁시키는데 필요한 限界費用을 期待效用으로 표현한 식이 된다. 식 (9)의 우변에서, L은 보험을 한단위 더 구매함으로써 손해발생시 보험회사로부터 받을 수 있는 限界 保險支給金額 (즉, $\frac{\partial}{\partial b}bL=L$)으로 간주할 수 있으므로, 식 (9)의 우변은 손해발생시 보험회사로부터 받는 혜택을 限界期待效用으로 표현한 식이 된다. 따라서 식 (9)는 보험구매자의 最適保險水準(optimal coverage of insurance)이 期待效用으로 표현한 보험의 限界費用과 限界惠澤이 같아지는 점에서 결정됨을 보여준다.

最適保險의 조건인 식 (9)는 식 (10)과 같이 변형될 수 있다.

$$(10)\ P=\frac{1}{R_F}\cdot\frac{qE[u'(Y_1)L]}{(1-q)u'(Y_0)+qE[u'(Y_1)]}$$

식 (10)은 균형상태에서 보험료는 市場利子率을 할인율로 적용한 現價의 개념임을 명백히 보여준다. 여기서 보험료 P는 均衡保險料 槪念으로서, 보험계약자의 입장에서는 純保險料와 위험프리미엄으로, 보험사업자의 입장에서는 純保險料와 附加保險料로 구분하여 설명할 수 있다.

이를 알아보기 위해 먼저 Arrow-Pratt에 의해 개발된 위험프리미엄 π를 아래의 식 (11)의 관계에서와 같이 내재적으로 정의하자.

$$(11)\ u(E(Y)-\pi)=E[u(Y)].$$

여기서 위험프리미엄 π는 의사결정변수인 b의 함수가 된다.[9] 식 (11)의 좌변에서 기간말 富의 確實性 等價(certainty equivalent)에 대한 효용 $u(E(Y)-\pi)$를 극대화하기 위한 1차 조건은 아래의 식 (12)와 같이 표기될 수 있다.

$$(12)\ \frac{\partial}{\partial b}u(E(Y)-\pi)= u'(E(Y)-\pi)(-PR_F+qE(L)-\pi_b)=0.$$

여기서 $\pi_b(=\frac{\partial}{\partial b}\pi)$는 한계위험프리미엄을 나타낸다. 불포만성에 의해 $u'>0$ 이므로 식 (12)는 아래의 식 (13)으로 간단히 표기될 수 있으며,

$$(13)\ P=\frac{1}{R_F}[qE(L)-\pi_b].$$

9) $E(Y)=(w-bP)R_F-q(1-b)E(L)$

식 (10)과 식 (13)의 관계에서 다음과 같은 한계 위험프리미엄 π_b가 유도된다.

(14) $\pi_b=$

$$\frac{q(1-q)\{E(u'(Y_1))-u'(Y_0)\}+q\mathrm{Cov}[u'(Y_1), L]}{(1-q)u'(Y_0)+qE(u'(Y_1))}$$

식 (13)에서 $qE(L)$은 기간말에 예상되는 손해액이므로 $\frac{1}{R_F}qE(L)$은 현가로 표시된 純保險料이다. 또한 식 (13)에서 한계위험프리미엄$(-\pi_b)$에는 보험계약자의 위험회피에 관한 모든 정보가 구체화되어 있다.[10] 보험계약자의 관점에서, $(-\pi_b)$는 위험회피태도에 의해 보험계약에 있어 순보험료외에 추가적으로 부담하는 비용이 되고, 보험사업자의 입장에서는 경비와 이익을 나타내는 附加保險料를 의미한다. 여기서 $(-\pi_b)$가 항상 陽의 값을 가짐은 다음과 같이 알 수 있다. 식 (14)의 우변의 분자의 첫번째 항에서 $Y_0>Y_1$ 이고 $u''<0$ 이므로 $E[u'(Y_1)]>u'(Y_0)$ 이다. 또한 L과 Y_1은 負(−)의 관계를 갖고 $u''(Y_1)<0$이므로 $u'(Y_1)$ 과 L과는 正(+)의 관계를 갖게 되어 $\mathrm{Cov}[u'(Y_1), L]>0$ 이다. 따라서 식 (11) 우변의 분자는 항상 陽의 값을 가지므로 附加保險料 개념인 $(-\pi_b)$도 항상 양의 값을 가진다. 즉 이성적인 보험수요자는 균형상태에서 純保險料는 물론 부가보험료까지도 지불하고 그가 직면한 위험의 일부를 보험회사를 이전시키는 것이다.

위의 분석에서 분명해진 바와 같이, 위험은 어떤 코스트(Cost)를 내포하고 있는데 期待價値極大化의 法則은 이 코스트를 고려하고 있지 않다.

Ⅳ. 比較靜態分析 1−危險回避增加의 影響

이번 장에서는 보험계약자의 危險回避의 정도가 最適保險量에 어떻게 영향을 미치는 가를 분석하기로 한다. 보험계약자의 最適購買需要는 보험계약자가 가진 효용함수의 위험회피의 정도와 직접적으로 연관되어 있다. 먼저 定理3에 사용되는 Arrow-Pratt에 의해서 개발된 위험회피의 척도를 소개하면 다음과 같다. 두 von Neumann-Morgenstern 효용함수 U_A와 U_B에서,

$$-\frac{U_A''(w)}{U_A'(w)}<-\frac{U_B''(w)}{U_B'(w)}$$

의 관계가 모든 富의 수준 w에서 성립하면 U_B는 U_A보다 더 위험회피적(more risk averse)이라 한다. 위의 정의를 이용하여 다음과 같은 정리를 증명할 수 있다.

〈定理 3〉

위험회피의 정도가 강한 보험계약자는 상대적으로 위험회피의 정도가 약한 보험계약자보다 더 많은 양의 보험을 산다. 즉,

$$-\frac{U_A''(w)}{U_A'(w)}<-\frac{U_B''(w)}{U_B'(w)}\Rightarrow b_A<b_B$$

〈증명〉 $-\frac{U_A''}{U_A'}<-\frac{U_B''}{U_B'}$ 인 두 효용함수 U_A와 U_B의 최적보험량을 각각 b_A와 b_B로 표기하고 $\mathrm{Max}\,E[U_A(Y)]$를 만족시키는 b_A로부터 $\hat{Y}$

10) 위험중립형의 효용함수에서 $\pi_b=0$이 된다. 즉 $u'(Y_0)=u'(Y_1)$은 상수이고 따라서 $\mathrm{Cov}[u'(Y_1), L]$도 零이 된다.

와 $\hat{L}$을 다음식 (15)와 같이 정의한다고 하자.

$$(15)\quad \hat{Y}=(w-b_AP)R_F-(1-b_A)\hat{L},$$

여기서 $\hat{L}$은 $\hat{L}=PR_F$인 값을 가지는(랜덤변수가 아닌) 상수로 정의한다. 따라서 $\hat{Y}$도 랜덤변수가 아닌 상수가 됨에 유의한다. $\text{Max}\, E[U_i(Y)]$를 만족시키는 $b_i(i=A,\ B)$는 $\text{Max}\, \dfrac{E[u_i(Y)]}{u'_i(\hat{Y})}$를 만족시키는 $b_i(i=A, B)$와 동등하다. 그러면 이제부터 $K_i(b)\equiv\dfrac{E[u_i(Y)]}{u_i'(\hat{Y})}$라 정의하여 $K_A'(b_A)-K_B'(b_A)$를 평가한다. 만일 $K_A'(b_A)-K_B'(b_A)$가 음의 값을 가지면 $K_A'(b_A)=0$이기 때문에 $K_B'(b_A)$가 양의 값을 가지게 되어 $b_A<b_B$를 증명하는데 충분하다. Y_{0A}와 Y_{1A}를 각각 $b=b_A$일 때의 Y_0와 Y_1이라고 정의하면 아래의 식 (16)이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned}(16)\quad & K_A'(b_A)-K_B'(b_A)\\ &=\frac{1}{u_A'(\hat{Y})}\{-PR_F(1-q)u_A'(Y_{0A})\\ &\quad +qE[u_A'(Y_{1A})(-PR_F+L)]\}\\ &\quad -\frac{1}{u_B'(\hat{Y})}\{-PR_F(1-q)u_B'(Y_{0A})\\ &\quad +qE[u_B'(Y_{1A})(-PR_F+L)]\}\\ &=(1-q)PR_F[\frac{u_B'(Y_{0A})}{u_B'(\hat{Y})}-\frac{u_A'(Y_{0A})}{u_A'(\hat{Y})}]\\ &\quad +qE[\{\frac{u_A'(Y_{1A})}{u_A'(\hat{Y})}-\frac{u_B'(Y_{1A})}{u_B'(\hat{Y})}\}\times\\ &\quad (-PR_F+L)]\end{aligned}$$

여기서 L은 손실의 심도를 나타내는 랜덤 변수로 그 범위는 $0<L<\infty$ 이다. 이제 식 (16)의 전체 부호를 판별하기 위해 $0<L<PR_F$와 $PR_F<L$인 두 경우를 고려하여 각각에 대한 條件附 確率을 사용하면 식 (16)은 식 (17)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}(17)\quad & K_A'(b_A)-K_B'(b_A)\\ &=(1-q)PR_F[\frac{u_B'(Y_{0A})}{u_B'(\hat{Y})}-\frac{u_A'(Y_{0A})}{u_A'(\hat{Y})}]\\ &\quad +qE\{[\frac{u_A'(Y_{1A})}{u_A'(\hat{Y})}-\frac{u_B'(Y_{1A})}{u_B'(\hat{Y})}]\times\\ &\quad (-PR_F+L)\,|\,0<L<PR_F\}\cdot F(PR_F)\\ &\quad +qE\{[\frac{u_A'(Y_{1A})}{u_A'(\hat{Y})}-\frac{u_B'(Y_{1A})}{u_B'(\hat{Y})}]\times\\ &\quad (-PR_F+L)\,|\,PR_F<L\}\cdot[(1-F(PR_F)].\end{aligned}$$

식 (17)은 크게 세 항으로 구성되어 있는데 이 각각의 세 항은 Pratt(1964)에 의해 양과 음의 부호를 판별할 수 있다. 즉, $-\dfrac{u_A''}{u_A'}<-\dfrac{u_B''}{u_B'}$의 부등식이 성립하면 $\dfrac{d}{dw}\ln\dfrac{u_A'(w)}{u_B'(w)}>0$의 관계가 성립하고, 또 이 부등식은 $w_1>w_2$일 경우 $-\ln\dfrac{u_A'(w_1)}{u_A'(w_2)}>-\ln\dfrac{u_B'(w_1)}{u_B'(w_2)}$가 되며, $w_1<w_2$일 경우 $-\ln\dfrac{u_A'(w_1)}{u_A'(w_2)}<-\ln\dfrac{u_B'(w_1)}{u_B'(w_2)}$가 된다. 결국 위의 부등식은 아래의 부등식 (18)와 (19)로 간단히 표기할 수 있다.

$$(18)\quad -\frac{u_A''}{u_A'}<-\frac{u_B''}{u_B'}\text{이고 } w_1>w_2\text{이면,}$$

$$\frac{u_A'(w_1)}{u_A'(w_2)}>\frac{u_B'(w_1)}{u_B'(w_2)},$$

$$(19)\quad -\frac{u_A''}{u_A'}<-\frac{u_B''}{u_B'}\text{이고 } w_1<w_2\text{이면,}$$

$$\frac{u_A'(w_1)}{u_A'(w_2)}<\frac{u_B'(w_1)}{u_B'(w_2)}.$$

이제 부등식 (18)과 (19)를 이용하여 식 (17)의 세 항에 대한 부호를 각각 판별할 수 있다. 식 (17)의 첫번째 항에서 $Y_{0A}>\hat{Y}$ 임을 유의하면 부등식 (18)에 의해 첫번째 항은 陰의 값을 갖는다. 두번째 항에서 L의 범위는 $0<L<PR_F$로 제한되어 있으므로 $Y_{1A}>\hat{Y}$ 그리고 $-PR_F+L<0$이 되어 부등식 (18)에 의해 두번째 항의 부호도 陰이 된다. 세번째 항에서 L의 범위는 $PR_F<L$이므로 $Y_{1A}>\hat{Y}$가 되고 $-PR_F+L>0$이 되므로 부등식 (19)에 의해 세번째 항의 부호도 陰이 된다. 결국 식 (17)에서 $K_A'(b_A)-K_B'(b_A)<0$가 되어 $b_A<b_B$의 결과가 된다. Q. E. D.

상기한 바와 같이 Arrow-Pratt의 危險回避尺度는 보험계약자가 가지고있는 위험회피의 정도에 따라 最適保險量을 선택하는 경제적 행위를 충분히 설명해 주고 있다. 보험계약자의 위험회피의 정도가 강하면 강할수록 보험계약자가 구매하는 보험량은 그만큼 증가한다. 이는 다음 식에서와 같이, 保險購買量이 富의 평균과 기대치에 미치는 영향을 고려하면 보다 직관적으로 이해할 수 있다. 즉,

$$E(Y)=(w-bP)R_F-q(1-b)E(L),$$
$$Var(Y)=q^2(1-b)^2\sigma_L^2$$

이므로

$$\frac{\partial}{\partial b}E(Y)=-PR_F+qE(L)<0,$$
$$\frac{\partial}{\partial b}Var(Y)=-2q^2(1-b)\sigma_L^2<0$$

이 된다. 따라서, 보험계약자는 危險回避의 정도가 증가하면 그에 대응하여 보험구매량을 증가시켜 그의 기간 말 富의 분산 (즉, 위험)을 감소시키고, 그 분산을 감소시키는 對價로 기간말 예상되는 富의 기대치도 줄인다.

V. 比較靜態分析 2—富의 影響

이제 다른 조건은 일정하나 보험계약자의 富가 변한다고 할 때 最適保險量이 어떻게 영향을 받을 것인가를 고려해 보고자 한다.

〈定理 4〉

보험계약자의 부가 증가할 경우, 보험계약자가 감소절대위험회피이면 보험구매량은 감소하고, 항상절대위험회피를 나타내면 보험구매량은 불변이며, 증가절대위험회피를 나타낼 경우 보험구매량은 증가한다. 즉,

$$\text{DARA} \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial w}<0,$$
$$\text{CARA} \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial w}=0,$$
$$\text{IARA} \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial w}>0.$$

〈증명〉 最適保險인 b는 1차조건인 식 (4)로부터 결정되었으므로 이 b와 w와의 관계만을 고려하기 위하여 편의상 식 (4)를 다음과 같이 정의한다.

$$(20)\quad G(b,w)=-PR_F(1-q)u'(Y_0)+qE[u'(Y_1)(-PR_F+L)]=0.$$

식 (20)에서 함수 G의 $i(i=1,2)$번째 변수에 대한 편미분(Partial Differential)을 D_iG라고 표기하면, D_1G는 2차조건 (5)에 의해 陰의 값을 갖기 때문에 Implicit Function Theorem에 의하여 아래의 식 (21)과 (22)에서 내재적으로 정의되는 함수 g가 존재한다.

(21) $G(g(w), w)=0$ 그리고 $g'(w)=-\frac{D_2G}{D_1G}$,

(22) $D_2G=-(1-q)P(R_F)^2u''(Y_0)+ qR_F E[u''(Y_1)(-PR_F+L)]$.

식 (21)에서 $D_1G<0$이기 때문에 $g'(w)$의 부호는 분자 D_2G에 의해 결정됨을 알 수 있다. 이제 식 (22)에서 D_2G의 부호를 결정하는데 있어서 보험계약자의 위험회피($u''<0$)만으로는 충분하지 않다. 먼저 보험계약자의 위험회피에 대한 태도가 減少絶代危險回避(DARA)라고 가정하자. 이 경우, 모든 부의 수준 w에 대하여

$$\frac{\partial}{\partial w}ARA(w)\equiv\frac{\partial}{\partial w}(-\frac{u''(w)}{u'(w)})<0$$

이 된다. 먼저 $L=PR_F$ 인 경우의 Y_1을 아래와 같이 정의한다.

$$\hat{Y}_1=(w-bP)R_F-(1-b)\hat{L},\ \hat{L}=PR_F$$

이 경우 $\frac{\partial}{\partial w}ARA(w)<0$이고 $Y_0>Y_1$이기 때문에

$$-\frac{u''(Y_0)}{u'(Y_0)}<ARA(\hat{Y}_1)$$

이 되고, 따라서 아래의 식 (23)이 성립한다.

(23) $-u''(Y_0)<ARA(\hat{Y}_1)u'(Y_0)$.

식 (22)에서 L은 $(0, \infty)$의 범위를 가지는 랜덤변수이므로 $-PR_F+L$은 양의 값을 가질 수도 있고 음의 값을 가질 수도 있으므로, 전체 부호를 결정하기 위하여 $0<L<PR_F$인 경우와 $PR_F<L$인 경우로 나누어 분석하여야 한다. 먼저 $0<L<PR_F$ 인 경우, $\hat{Y}_1<Y_1$ 가 되어

(24) $-\frac{u''(Y_1)}{u'(Y_1)}<ARA(\hat{Y}_1)$

이 성립한다. 부등식 (24)는

(25) $-u''(Y)<ARA(\hat{Y}_1)u'(Y_1)$

가 되고, 부등식 (25)의 양변에 음의 값을 가지는 $(-PR_F+L)$을 곱하면

(26) $-u''(Y)(-PR_F+L)< ARA(\hat{Y}_1)u'(Y_1)(-PR_F+L)$

이 된다.

$L>PR_F$인 경우는 $\hat{Y}_1>Y_1$가 되어 $-\frac{u''(Y_1)}{u'(Y_1)}>ARA(\hat{Y}_1)$이 되며, 양변에 양의 값을 가지는 $(-PR_F+L)$을 곱하면 이는 결국 부등식 (26)의 결과가 된다. 이제 부등식 (26)은 DARA의 가정하에 L의 모든 범위 (0, ∞)에서 성립함을 알 수 있다. 이제 식 (22)의 전체에 대한 부호를 결정하기 위해 식 (23)과 식 (26)을 결합시킨 다음 期待效用을 구하기 위하여 적분을 취하면

(27) $D_2G(g(w), w)=-(1-q)P(R_F)^2u''(Y_0) +qR_FE[u'(Y_1)(-PR_F+L)] \leq -ARA(\hat{Y})R_F\{-PR_F(1-q)u'(Y_0)+ qE[u'(Y_1)(-PR_F+L)]\}$

이 됨을 알 수 있다. 그런데 식 (27)에서 부등호 (≤) 우변의 괄호는 식 (20)에 의해 최적보험량의 1차 조건이 되어 0이 되므로 결국 D_2G는 음의 값을 가짐을 알 수 있다. 따라서 DARA의 경우 $\frac{\partial b}{\partial w}<0$이 됨을 증명하였다.

항상절대위험회피(CARA)와 증가절대위험회피(IARA)의 경우도 위와 동일한 과정을 거쳐 증명할 수 있으므로 생략한다. Q. E. D.

Arrow(1965) 이래 富가 증가함에 따라 危險回避의 정도가 非增加하는 감소절대위험회피(DARA)와 항상절대위험회피(CARA)는 모범적인 期待效用의 假說로 인정되어 왔다. DARA의 경우, 富가 증가하면 보험계약자는 오히려 적은 양의 보험을 구매하고 이는 보험계약이 열등재(inferior good)임을 의미한다. 恒常絶對危險回避의 경우 $\frac{\partial b}{\partial w}=0$ 되어 보험계약은 부의 증감에 전혀 영향을 받지 않는다. 증가절대위험회피(IARA)의 경우 $\frac{\partial b}{\partial w}>0$ 되어 보험계약은 우등재 또는 정상재 (superior good, normal good)가 된다.

이 같은 富의 증가가 最適保險 購買量에 미치는 효과는 위험프리미엄 π의 개념을 사용하면 직관적인 설명이 가능하다. Pratt(1964)의 정리에 의해 위험회피의 강도는 위험프리미엄의 크기와 비례한다. 또한 본고의 定理 3에서 규명한 바와 같이 위험회피의 강도와 보험계약자의 保險購買量도 비례관계에 있으므로 위험프리미엄의 크기와 보험구매량도 正의 관계로써 비례한다. 이와같은 점에 유의하여, 부의 증가가 위험프리미엄의 크기에 미치는 영향을 살펴보면 부의 증가가 保險購買量에 미치는 영향을 살펴볼 수 있다.

Pratt(1964)에 의하면 위험프리미엄 π는 기간말의 부 Y의 기대값과 분산의 함수로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\pi=\pi(E(Y),\ Var(Y)),$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\pi=\frac{\partial \pi}{\partial E(Y)}\cdot\frac{\partial E(Y)}{\partial w}+\frac{\partial \pi}{\partial Var(Y)}\cdot\frac{\partial Var(Y)}{\partial w}$$

위의 식에서, Pratt(1964)에 의하면 DARA일 경우 $\frac{\partial \pi}{\partial E(Y)}<0$이고, CARA일 경우 $\frac{\partial \pi}{\partial E(Y)}=0$, 또한 IARA일 경우 $\frac{\partial \pi}{\partial E(Y)}>0$이 된다. 본고의 모형에서, $\frac{\partial E(Y)}{\partial w}=R_F>0$이고 $\frac{\partial Var(Y)}{\partial w}=0$이므로 $\frac{\partial \pi}{\partial w}$에 대한 양 음의 부호는 $\frac{\partial \pi}{\partial E(Y)}$의 부호와 동일하다. 따라서 DARA의 경우, 보험계약자가 소지한 원래의 부(w)의 증가는 기간말 부(Y)의 기대값을 증가시켜 위험프리미엄의 크기 π를 감소시킴으로써 결과적으로 보험계약자는 부의 증가 이전보다 적은 危險回避의 정도를 갖게 되어 보다 작은 양의 보험을 구입하게 된다. CARA와 IARA의 경우도 같은 맥락에서 설명할 수 있다.

Ⅵ. 比較靜態分析 3－利子率의 影響

여기에서는 최적보험수준 b가 결정되고 다른 모든 조건이 일정할 경우 시장이자율 R_F가 증가한다고 하면 b는 이에 어떤 영향을 받는가를 고려하고자 한다. 이에 대한 분석도 앞장의 부의 효과를 분석할 경우와 유사한 절차를 거쳐 행할 수 있다.

〈定理 5〉

시장이자율이 증가할 경우, 보험계약자가 감소절대위험회피이면 최적보험수준은 감소하고, 항상절대위험회피이면 최적보험수준은 불변이며, 증가절대위험회피이면 최적보험수준은 증가한다. 즉,

$$\text{DARA}\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial R_F}<0,$$

$$\text{CARA}\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial R_F}=0,$$

$$\text{IARA}\Rightarrow\frac{\partial b}{\partial R_F}>0.$$

〈증명〉 식(4)로부터 다음과 같은 함수 T를 정의하면

$$(28)\ T(b,\ R_F)=-PR_F(1-q)u'(Y)+qE[u'(Y)(-PR_F+L)]=0,$$

Implicit Function Theorem에 의하여 아래의 식(29)에서 정의되는 함수 t가 존재한다.

$$(29)\ T(t(R_F),\ R_F)=0 \text{ 그리고 } t'(R_F)=-\frac{D_2T}{D_1T}$$

식 (29)에서 $D_1T<0$ 이므로 $t'(R_F)$의 부호는 D_2T와 일치하고 D_2T는 편미분에 의한 복잡한 계산과정을 거치면 결국 아래의 식(30)과 같이 구해진다.

$$(30)\ D_2T=w\{-PR_F(1-q)u''(Y)+qE[u''(Y)(-PR_F+L)]\}$$

위의 식(30)은 定理4에서 부의 효과를 증명할 때와 유사한 과정을 거쳐 DARA일 경우 $D_2T<0$, CARA일 경우 $D_2T=0$, IARA일 경우 $D_2T>0$ 이 된다. Q.E.D.

이와 같이 利子率의 증가는 無危險資産의 수익이 증가하는 것을 의미하므로 이는 앞장에서 분석한 기간초 부의 증가와 동일한 효과를 갖게 된다. 이에 대한 해석도 부의 효과에서와 같은 맥락에서 할 수 있으므로 여기서는 생략하기로 한다.

Ⅶ. 맺음말

본고에서는 保險契約者가 당면한, 損失에 대한 頻度의 危險과 深度의 危險을 동시적으로 고려하여 保險需要를 理論經濟學的 側面에서 분석하였다. 본고의 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

(1) 보험료가 純保險料로만 구성되어 있으면 모든 보험계약자는 그가 직면한 모든 위험을 제거시켜주는 100%의 完全保險을 산다. 즉, 부가보험료가 포함되지 않은 경우, 部分保險에 가입한 보험계약자 부의 분포는 완전보험에 가입한 경우의 부의 분포의 평균보유확산이 되므로 모든 이성적인 보험계약자는 추가적인 위험이 없는 完全保險을 선호한다.

(2) 보험료가 純保險料와 附加保險料로 구성되어 있으면 보험계약자는 그가 직면한 위험을 부분적으로 제거시켜 주는 部分保險을 산다. 보험수요자는 期待效用이 극대화되는 점에서 最適保險量을 구매하는데, 이 때 선택한 최적보험수준은 한계보험료가 한계보험지급금에 한계위험프리미엄의 절대치를 합한 값의 현가와 같아지는 점이다. 즉, 보험계약자는 순보험료 이외에 추가적으로 부가보험료도 지불하면서 보험을 구매한다. 따라서 현실 보험시장에서 보험회사의 營業保險料에는 경비와 이익을 충당하는 附加保險料가 포함되어 있는데, 이 부과보험료가 과도하지만 않으면 보험시장은 항상 자발적으로 존재하고, 이 경우 보험계약자는 보험회사와 위험을 서로 나누어 분담하는 것이 최적이다.

(3) 危險回避의 程度가 심한 보험계약자일수록 많은 양의 보험을 구입한다. 즉 보험계약자의 危險回避程度와 最適保險水準은 '正'의 관계에서 비례한다. 보험계약자는 위험회피의 정도가 증가하면 그에 대응하여 保險購買水準을 증가시켜 그의 기간 말 富의 분산을 감소시키고, 그 분산을 감소시키는 對價로 기간말 예상되는 富의 기대치도 줄

인다.

(4) 減少絶對危險回避의 경우 보험계약은 열등재이고, 恒常絶對危險回避의 경우 보험계약은 부의 증감과는 독립되어 있으며, 增加絶代危險回避의 경우 보험계약은 우등재가 된다. 이 결과는 위험프리미엄의 개념으로 설명이 가능하다. 위험프리미엄은 기간말 부의 기대치와 分散의 函數인데 기간 초 부의 증가는 분산과는 관계없이 기간말 부의 기대치를 증가시킨다. 이 때, 예를들면, 減少絶代危險回避일 경우 부의 기대치증가는 위험프리미엄의 크기를 감소시켜 위험회피의 정도를 약화시키며 이는 保險購買量의 수준을 낮추는 결과로 나타난다.

(5) 市場利子率의 增減은 無危險資產의 수익이 증감하는 것을 의미하므로 利子率 效果는 결국 부의 효과에서와 동일한 결과를 갖게 된다.

參考文獻

Arrow, K. J., *Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Helsinki : Johnsonin Saatie, 1965.

_____, "Optimal Insurance and Generalized Deductibles," *Scandinavian Actuarial Journal*, 1974, pp.1–42.

Bawa, V.J., "Stochastic Dominance : A Research Bibliography," *Management Science*, 1982, pp. 698–712.

Borch, K., "The Optimal Insurance Contract in a Competitive Market," *Economics Letters*, 11, 1983, pp. 327–330

_____, "Insurance and Giffen's Paradox," *Economics Letters*, 20, 1986, pp. 303–306

Freifelder, L. R., "Exponential Utility Theory Ratemaking : An Alternative Ratemaking Approach," *Review of Economic Studies*, 1979, pp. 5–12.

Gould, J. P., "The Expected Utility Hypothesis and the Selection of Optimal deductibles for a Given Insurance policy," *Journal of Business*, 1969, pp. 143–152.

Mossin, J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing," *Journal of Political Economy*, 1968, pp. 553–568

von Neumann,J. and O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior," *Princeton University Press*, Princeton, New Jersey, 1944.

Pratt, J. W., "Risk Aversion in the Samll and Large," *Econometrica*, January-April, 1964, pp. 122–136.

Rothschild, M. and J. Stiglitz, "Increasing Risk I : A Definition," *Journal of Economic Theory 2*, September 1970, pp. 225–243.

Schlesinger, H., "The Optimal Level of Deductiblity in Insurance Contracts," *Journal of Risk and Insurance*, 1981, pp. 465–481

Smith, V., "Optimal Insurance Coverage," *Journal of Political Economy*, 1968, pp. 68–77.