IV. 보험리스크의 수리적 평가모델

여기에서는 보험회사에 적용되는 여러 보험리스크의 수리적 · 통계적 평가모델 등을 중심으로 고찰해보고 이 모델들의 속성 및 전개과정에 대해서 살펴보고자 하였다. 보험리스크의 수리적 평가모델은 전술한 바와 같이 보험리스크 평가의 복잡성 등으로 인하여 여타 리스크평가모델에 비하여 상대적으로 연구가 미비한 실정인데, 제IV장에서 별도로 보험리스크의 수리적 평가모델을 제시한 이유는 제III장, 그리고 제V장 및 제VI장의 보험리스크분석과 직간접적으로 상호관련성이 존재할 뿐만 아니라 다양한 보험리스크평가모델의 적용가능성을 살펴보는 데에 기여하기 위해서이다.

1. 펜티켄(Pentikäinen)의 모델

Pentikäinen은 보험포트폴리오의 성장가능성을 판단하는데 있어 파산확률의 계산이 특히 중요하다고 보았으며 파산은 복합포아송분포에 따라 발생한다는 가정하에 파산확률을 측정하기 위해 단순측정기법을 사용하였다. 즉 총보험금청구액(aggregate claims)이 복합 포아송분포를 따른다고 가정할 때,

$$1 + (1 + \eta)\, a_1 R = \int e^{Rz}\, dF_Z(z) \quad \text{---------------------------} \quad (1)$$

(1)식이 도출되며 (2)식이 성립하게 된다.

$$1 + (1 + \eta)\, a_1 R = \int e^{Rz}\, dF_Z(z) = 1 + a_1 R + \frac{a_2 R^2}{2!} + \cdots \quad (2)$$

또한, (3)식과 같은 부등식에 의해

$$a_1(KM)^{j-1} \le a_j \le a_2 M^{j-2}, \quad (j>1) \quad \text{--------------------} \quad (3)$$

(단, M은 손해액의 최대값이며, $K = \dfrac{a_2}{a_1 M} \le 1$)

(3)식의 우측 관계식은

$$a_j = \int_0^M z^j \, dF_z(z) \le M^{j-2} \int_0^M z^2 dF_z(z) = a_2 M^{j-2}$$ 이며,

(3)식의 좌측 관계식은,

$$\frac{a_j}{a_{j-1}} \le \frac{a_{j+1}}{a_j}$$ 이 성립한다.

임의의 확률변수 z_1, z_2 는 $i.i.d$ 를 따른다고 가정할 때,

$$2(a_{j+1}a_{j-1} - a_j^2) = E\, z_1^{j+1} z_2^{j-1} + E\, z_1^{j-1} z_2^{j+1} - 2E\, z_1^j z_2^j$$
$$= E\left\{(z_1 - z_2)^2 z_1^{j-1} z_2^{j-1}\right\} \ge 0$$

이 성립하고 아래식이 도출된다.

$$a_j = a_1 \prod_{\ell=2}^{j} \frac{a_\ell}{a_{\ell-1}} \ge a_1 \prod_{\ell=2}^{j} \frac{a_2}{a_1} = a_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{j-1} = a_1 (KM)^{j-1}$$

(3)식을 이용하는 경우 (2)식으로부터 다음 식이 도출된다.

$$\eta a_1 R \geq a_1 \frac{KMR^2}{2!} + a_1 (KM)^2 \frac{R^3}{3!} + \cdots$$
$$\eta KMR \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(KMR)^k}{k!} = e^{KMR} - KMR - 1 \quad \text{--------} \quad (4)$$

위의 식을 전환하면 (5)식이 성립한다.

$$\frac{\eta}{K} MR \leq e^{MR} - MR - 1 \quad \text{--------------------------------------} \quad (5)$$

이제 $(1+a)x + 1 - e^x = 0$ 의 해를 $X^*(a)$라 하면 (4)식 및 (5)식은 (6)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$x^*\left(\frac{\eta}{k}\right) \leq MR \leq \frac{x^*(\eta)}{k} \quad \text{--------------------------------------} \quad (6)$$

따라서, $\varepsilon = e^{-RU}$ 와 $1.75\eta < x^*(\eta) < 2\eta$ 을 이용하면($\eta \leq 0.2$에 대해 참인), (7)식이 도출된다.

$$\frac{K \log(1/\varepsilon) M}{2\eta} < U \leq \frac{\log(1/\varepsilon) M}{x^*(\eta/K)} < \frac{\log(1/\varepsilon) M}{1.75\eta} \quad \text{-------} \quad (7)$$

2. 아미터(Ammeter)의 모델[24)]

---

24) 아미터방식은 다음과 같은 의미를 지니고 있다.

① 정기생명보험이 포트폴리오(각계약의 합 전체)의 10%이하라면, 아미터(Ammeter)의 이론에 따라 얻어진 솔벤시마진의 일부만이 필요하다.

② 위험프레미엄이 너무 낮게 측정되면, η 값이 실제보다 높게 측정되어 솔벤시마진이 불충분하게 측정될 가능성이 높아진다.

아미터는 정기 생명보험의 보험리스크를 분석하기 위해 파산확률모형에 기초한 보험수리적모델을 제시하였는데, 이 모델은 생명보험사의 보험리스크평가하는 데에 여타 리스크평가모델보다 많이 활용되고 있다.

이제 보험금청구건수는 음이항분포를 따른다고 가정할 때,

$$P\{n = k\} = \binom{h+k-1}{k} \left(\frac{h}{\nu + h}\right)^h \left(\frac{\nu}{\nu + h}\right)^k \quad \text{------} \quad (1)$$

(1)식이 성립하며 보험금청구금액은 감마(gamma)분포를 따른다고 가정할 때 (2)식이 도출된다.

$$dF_z(z) = \frac{\alpha^{\alpha} e^{-\alpha x} x^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{------------------------------------} \quad (2)$$

$$(\text{단},\ a_1 = 1,\quad var(z) = \frac{1}{\alpha})$$

조정계수(adjustment coefficient)는 (3)식에 의해 산출될 수 있기 때문에 (1)식이 증명된다.

$$\int_0^{\infty} e^{Rz} dF_Z(z) = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\eta) R a_1 \nu / h}}{\nu / h} \quad \text{--------------} \quad (3)$$

이 경우 감마분포 R은 (4)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$R \approx \frac{2\eta}{(1 + \frac{\nu}{h} + \frac{1}{\alpha})(\frac{3}{2\eta} + 1)} \quad \text{-----------------------------} \quad (4)$$

따라서 U는 (5)식과 같이 도출된다.

$$U = \frac{(1+\frac{\nu}{h}+\frac{1}{\alpha})(\frac{3}{2\eta}+1)}{2\eta}\log(\frac{1}{\varepsilon}) \quad \text{-------------------} \quad (5)$$

왜냐하면 평균 $a_1=1$ 인 감마분포를 가정하였으므로, 실제평균보험금청구금액(m_Z)을 곱하여 솔벤시마진(U)을 아래 (6)식과 같이 나타날 수 있다.

$$U = c_1 P' + c_2 m_Z \;, \quad \text{---} \quad (6)$$

여기서, $c_1 = \frac{1}{2h}(\frac{3}{2}+\frac{1}{\eta})\log\frac{(1/\varepsilon)}{1+\eta}$,

$c_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\frac{1}{\eta})(1+\frac{1}{\alpha})\log(1/\varepsilon)$

3. 보만(Bohman)의 모델

보만(Bohman)은 랜덤워크모형(random walk model)을 이용하여 파산을 측정하는 경험법칙을 구하고, 수치적 테스트를 통해 m_X, σ_X^2 , γ_X 를 구했는데, 미분법칙에 따라 X 는 보험료와 보험청구금액을 이용하여 여러 가지 방법으로 정의될 수 있는데, 보만이 제시한 모델을 살펴보면 다음과 같다.

가. NP 근사법

임의보행모형의 n단계의 합은 NP 방법에 의해 근사값을 구할 수 있

다. 아래와 같이 (1)식으로 표현할 수 있다.

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\,m_X}{\sigma_X\sqrt{n}} < y + \frac{\gamma_X}{6\sqrt{n}}(y^2-1)\right\} \Phi(y) \quad --- \quad (1)$$

이제 $P\left\{U_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i < 0\right\} \leq \varepsilon$ 을 만족시키기 위해 (2)식이 성립하는 U_0를 도출해야 되는데,

$$U_0 = y_\varepsilon \sigma_X \sqrt{n} - \frac{\gamma_X\,\sigma_X}{6}(y_\varepsilon^2 - 1) - n\,m_X \quad ------------------ \quad (2)$$

$$(\text{단},\ n^* = \frac{y_\varepsilon^2 \sigma_X^2}{4m_X^2}\ \text{임})$$

보만(Bohman)은 (3)식을 만족하는 U_0 을 구하는 경우, n단계의 한 시점에서 파산할 가능성은 충분히 작다는 것을 제시하고 있다.

$$\max_{k \in \{1,\ldots,n\}} P\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i + U_0 > 0\right\} \leq \varepsilon \quad ---------------------- \quad (3)$$

따라서 (4)식과 같이 U_0 에 대한 준비금을 도출한다.

$$U_0 = \begin{cases} y_\varepsilon \sigma_X \sqrt{n} - n\,m_X - \gamma_X\,\sigma_X\,(y_\varepsilon^2 - 1)/6, & \text{if } n < n^* \\ \dfrac{y_\varepsilon^2\,\sigma_X^2}{4m_X} - \gamma_X\,\sigma_X\,(y_\varepsilon^2 - 1)/6, & \text{if } n \geq n^* \end{cases} \quad (4)$$

$\varepsilon = 0.00007$, $y_{\varepsilon} = 4$ 이므로 U_0은 (5)식과 같이 된다.

$$U_0 = \begin{cases} 4\sigma_X \sqrt{n} - n\, m_X - 2.5\, \gamma_X\, \sigma_X, & n < n^*(= 4\sigma_X^2 / m_X) \\ 4\sigma_X^2 / m_X - 2.5\, \gamma_X\, \sigma_X, & n \geq n^* \end{cases} \qquad (5)$$

나. 월드 증명(Wald's identity)

임의보행이론에서, 월드모형을 이용하여 (6)식을 도출할 수 있다(단, U=0이며 확률은 e^{-RU} 이고 R은 (6)식의 해이다).

$$1 = \exp(-m_X R + \sigma_X^2 R^2/2 - \sigma_X^3 \gamma_X R^3/6 + \ldots) \quad \text{-------} \quad (6)$$

m_X는 σ_X^2에 비해 매우 작은 값이며, R은 $R = c_1 m_X + c_2 m_X^2$ 로 근사할 수 있다. 이식을 (6)식에 대입하고, m_X ($i.e.$ m_X^2, m_X^3) 중 가장 적은 항을 0으로 놓으면, c_1, c_2 등이 도출된다.

$$c_1 = 2/\sigma_X^2, \quad c_2 = 4\gamma_X / 3\sigma_X^3$$

이제 (7)식이 유도된다. 즉

$$\log(1/\varepsilon) = U.R \approx U(2 m_X^2 / \sigma_X^2 + 4 m_X^2\, \gamma_X / 3\sigma_X^3)$$

$$U \approx \frac{\sigma_X^2 \log(1/\varepsilon)}{2m_X} - \frac{\log(1/\varepsilon)\, \gamma_X\, \sigma_X}{3} \quad \text{--------------------} \quad (7)$$

$\log(1/\varepsilon) = 8$(또는 $\varepsilon = 0.000335$)인 경우 (8)식이 도출되며 (8)식은 $n \geq n^*$ 에 대한 (5)식과 유사하다.

$$U = 4\frac{\sigma_X^2}{m_X} - 8\frac{\gamma_X \sigma_X}{3} \quad \text{------------------------------------} \quad (8)$$

위의 두 가지 도출과정을 비교해 볼 때, 월드증명(Wald's identity)을 이용하는 경우에 ε이 최적의 파산확률을 갖는다. $T = \infty$ 인 경우, U을 구하는데 있어 다른 방법들과 비교할 때, 월드 증명을 이용하여 ε을 구하는 것이 유용하다.

4. 드빌더(De Vylder)의 모델

드빌더는 U_t의 전개식을 다음의 조건, 모두 만족하는 다른 과정 U_t'에 근사시킬 수 있다고 보았다.

① $E U_t = E U_t'$

② Z'의 분포함수는 $1 - e^{-X/a_1'}$ (Z'는 지수분포를 따르고, S'는 포아송-지수분포를 따름).

③ 원래 과정은 복합 포아송분포를 따른다.

새로운 과정의 파라미터 ν', a_1', η' 는 원래 과정으로부터 도출되는데, 이 값들은 Z', S' 과정의 특성함수를 확장함으로써 구할 수 있다.

$$a_1' = \frac{a_3}{3a_2}, \quad \eta' = \frac{2a_1 a_3}{3a_2^2}\eta, \quad \nu' = \frac{9a_2^3 \nu}{2a_3^2} \quad \text{--------} \quad (1)$$

S'는 포아송지수분포를 따르므로, 파산확률은 $\Psi(U)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi(U) = \frac{1}{1+\eta'} \exp\left(-\frac{\eta'}{1+\eta'}\frac{U}{a_1'}\right) \quad \text{-------------------} \quad (2)$$

파산확률이 ε인 경우 필요 솔벤시마진(U)은 다음과 같이 나타낸다.

$$U = -\log(\varepsilon(1+\eta'))\frac{1+\eta'}{\eta'} a_1'$$

$$= -\log\left\{\varepsilon\frac{3a_2^2+2a_1 a_3}{3a_2^2}\right\} \cdot \frac{3a_2^2+2a_1 a_3 \eta}{6a_1 a_2 \eta} \quad (3)$$

(2)식을 단순화시키면 (4)식과 같다.

$$\Psi(U) \approx \exp\left(\frac{-\eta'}{\eta'+1}\frac{U}{a_1'}\right) \quad \text{---------------------------------} \quad (4)$$

따라서 (IV-5)식이 성립한다.

$$U \approx \log(1/\varepsilon) \cdot \frac{a_2}{2a_1\eta} + \frac{\log(1/\varepsilon)\, a_3}{3a_2} \quad \text{--------------------------} \quad (5)$$

5. 그랜델(Grandell) 모형

그랜델은 위험과정이 위너과정으로 근사하는 이론적 특성을 이용하여 T가 유한과 무한인 경우 총보험청구금액이 복합 포아송분포를 따를 때, 다음과 같이 파산확률을 간단한 근사값으로 도출하였다.

$$\Psi(U, T) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a_1 \eta T \nu + U}{\sqrt{T \nu a_2}}\right) + e^{-2\eta a_1 U / a_2} \Phi\left(\frac{a_1 \eta T \nu - U}{T \nu a_2}\right) \quad - (1)$$

최적 파산확률은 다음 (2)식과 같다.

$$\Psi(U) \approx e^{-2\eta a_1 U / a_2} \quad \text{--------------------------------------} \quad (2)$$

따라서 (3)식과 같은 U에 관한 식이 도출된다.

$$U = \frac{\log(1/\varepsilon) \cdot a_2}{2 \eta a_1} \quad \text{---------------------------------------} \quad (3)$$

(2)식은 $\varepsilon = e^{-RU}$ 및 아래식 고려시 용이하게 유도된다.

$$1 + (1 + \eta) a_1 R = \int e^{Rz} \, dF_Z(z) \geq 1 + R a_1 + \frac{R^2 a_2}{2} \quad (4)$$

$$\frac{R a_2}{2} \leq n a_1 \Rightarrow R \leq \frac{2 \eta a_1}{a_2} \quad \text{-----------------------------} \quad (5)$$

$\frac{2 \eta a_1}{a_2}$은 R의 상한선 값이므로, (3)식에서 얻어진 파산확률은 U

가 큰 값들에 대해서 너무 낙관적일 수 있다[25]. (4)식에 좀 더 고차원의 적률을 고려함으로써 근사값을 구할 수 있다. 즉,

$$1+\ (1+\ \eta)\, a_1 R\ \approx\ 1+R\, a_1+\frac{R^2 a_2}{2}+\frac{R^3 a_3}{6}\quad \text{----------}\quad (6)$$

양의 근 R은 다음과 같이 표현된다[26].

$$R\ =\ -\ \frac{3}{2}\frac{a_2}{a_3}\ +\ \sqrt{\frac{9}{4}\frac{a_2^2}{a_3^2}\ +\ 6\frac{a_1}{a_3}\eta}\quad \text{--------------------------}\quad (7)$$

6. 암슬러(Amsler)의 모델

암슬러는 한기간동안의 솔벤시마진이 총보험료수입보다 더 크다고 보여주고 있고 포트폴리오 결합이후에는 포트폴리오의 솔벤시마진이 각각의 포트폴리오 솔벤시마진 합보다 작은 값을 보여주고 있다고 주장하였는데, 암슬러가 제시한 수리적 모델을 살펴보면 다음과 같다.

가. 일반식

총보험금청구금액이 복합포아송과정을 따른다고 가정할 경우 누적생성함수는 (1)식과 같이 나타낼 수 있다.

---

25) 그랜델에 의하면, U의 큰값들에 대해 60%에 이르는 상대적 오차값은 포아송감마 분포로 나타난다

26) 파산확률에 대한 좀 더 보수적인 추정치이다. 실제로, 포아송감마분포를 따르는 경우에 정확한 값에 비해 상당히 높게 파산확률이 계산된다.

$$\Psi_S(\tau) = \Psi_n[\Psi_Z(\tau)] \quad \text{--} \quad (1)$$

(단, $n =$ 보험금청구건수, $Z =$ 보험금청구금액)

반면, 가중 복합 포아송과정을 따를 경우에는 (2)식이 성립한다.

$$\Psi_S(\tau) = \Psi_W\{\Psi_V[\Psi_Z(\tau)]\} \quad \text{-----------------------------} \quad (2)$$

한 기간동안의 보험료수입이 (3)식과 같다고 할 때,

$$P' = (1+\eta)P = P + H \quad \text{---------------------------------} \quad (3)$$

한 기간동안의 잉여는 $X = P' - S$가 되며 누적생성함수는 (4)식과 같이 표현된다.

$$\Psi_X(\tau) = (P + H)\tau + \Psi_S(-\tau) \quad \text{---------------------------} \quad (4)$$

조정계수 R은 아래 식에 유일한 양의 값을 갖는다.

$$\Psi_X(-R) = 0 \quad \text{--} \quad (5)$$

$\varepsilon = e^{-RU}$일 때, (4)식 및 (5)식을 이용하여 $-R = \log\varepsilon / U$ 를 구하고, (6)식과 같은 암슬러의 일반균형방정식이 도출된다.

$$(P + H)\frac{\log\varepsilon}{U} + \Psi_S\left(\frac{-\log\varepsilon}{U}\right) = 0 \quad \text{---------------------} \quad (6)$$

나. 특별한 경우

1) $S \sim N(m_1, \mu_2)$: 보험금청구총액이 정규분포를 따르는 경우

$$\Psi_S(\tau) = m_1 \tau + \frac{1}{2}\mu_2 \tau^2 \quad \text{-------------------------------------} \quad (7)$$

(7)식의 값을 (6)식에 대입하면, (8)식을 도출할 수 있다.

$$2HU + \mu_2 \log \varepsilon = 0 \text{ or } U = \frac{\mu_2 \log(1/\varepsilon)}{2H} \quad \text{--------} \quad (8)$$

2) 적률 근사법

$\Psi_S(\tau)$는 (9)식으로 나타낼 수 있다. 즉

$$\Psi_S(\tau) = m_1 \tau + \frac{1}{2}\mu_2 \tau^2 + \frac{1}{6}\mu_3 \tau^3 + \ldots \quad \text{-------------------} \quad (9)$$

(9)식에서 두 번째항 이후를 절사하면 (7)식이 도출되며, 세 번째항 이후를 절사하면 (10)식이 유도된다.

$$6H + 3\mu_2 \frac{\log(1/\varepsilon)}{U} - \mu_3 \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{U}\right)^2 = 0 \quad \text{----------------------} \quad (10)$$

또는 $U = \dfrac{2\log(1/\varepsilon)\mu_3}{3\mu_2 + \sqrt{9\mu_2^2 + 24H\mu_3}}$, $(\mu_3 > 0)$ -------------- (11)

Ψ_X 대신 X 의 적률생성함수를 전개할 때, 2차적률 이후를 절사하면 $2HU + (\mu_2 + H^2)\log\varepsilon = 0$이 유도된다.

3) n이 감마 가중 포아송 과정을 따를 경우

$$\Psi_n(\tau) = -h\log\left(1 - \frac{\nu}{h}(e^{\tau} - 1)\right) \quad \text{-----------------------------} \quad (12)$$

Z가 감마 분포를 따른다고 가정하는 경우 아래식이 성립한다.

$$\Psi_Z(\tau) = \frac{1}{\alpha_2}\log(1 - \alpha_2\tau)$$

(1)식 및 (6)식을 이용하는 경우 (13)식이 유도된다.

$$(P + H)\frac{\log\varepsilon}{U} - h \cdot \log\left\{1 - \frac{\nu}{h}\left[\left(1 + \alpha_2\frac{\log\varepsilon}{U}\right)^{1/\alpha_2} - 1\right]\right\} = 0 \qquad (13)$$

다. 감마 분포를 따르는 경우

보험금청구총액이 감마 분포를 따르는 경우 (14)식이 성립한다.

$$\Psi_S(\tau) = -\frac{m_1^2}{\mu_2}\log\left(1 - \frac{\mu_2}{m_1}\tau\right), \qquad (P = m_1) \quad \text{------------} \quad (14)$$

(14)식을 (6)식에 대입하고, $\frac{\mu_2}{p^2}$ 를 곱하면 아래식이 유도된다.

$$(1+\eta)\frac{\mu_2 \log \varepsilon}{PU} - \log\left(1+\frac{\mu_2 \log \varepsilon}{PU}\right) = 0 \quad \text{----------------} \quad (15)$$

$$\eta' = \frac{-\ \mu_2 \log \varepsilon}{2PU} \quad \text{--} \quad (16)$$

따라서 η'는 (17)식으로부터 도출된다.

$$2(1+\eta)\eta' + \log(1-2\eta') = 0 \quad \text{-----------------------------------} \quad (17)$$

이제, η'를 이용하는 경우 아래식이 성립하게 된다. .

$$U = \frac{\mu_2 \log(1/\varepsilon)}{2P\eta'}$$

이상과 같은 수리적모델 중에서 본 연구는 일반적으로 생명보험사에 가장 적용가능한 것으로 인정되고 있는, 즉 생명보험사 보험리스크 평가에 적용가능한 아미터의 수리적모델 등을 참조하여 - 제가정의 설정, 분석방법의 수정・보완등 - 분석을 시도하고자 한다.[27)]

27) 자세한 내용은 제Ⅴ장의 분석모델설정 및 분석을 위한 제가정을 참조