

損害額分布와 保險意思決定

吳 昌 洙

(漢陽大 教授 · 經營學博士 · ASA)

目 次

- I. 序言
- II. 純保險料와 期待値의 假說
 - 1. 期待値의 假說
 - 2. 세인트 피터스버그의 逆說(St. Petersburg Paradox)
- III. 期待效用
 - 1. 效用과 期待效用
 - 2. 公理(axiom)의 體系
 - 3. 效用函數
 - 4. 危險回避에 대한 定義
- IV. 損害額分布
 - 1. 로그정규분포(The Log-normal distribution)
 - 2. 파레토분포 (The Pareto distribution)
 - 3. 감마분포 (The Gamma distribution)
- V. 危險프레미엄과 保險意思決定
 - 1. 保險과 期待效用
 - 2. 危險프레미엄 (Risk Premium)
 - 3. 保險商品의 選擇
 - 4. 問題點
- VI. 結言

I. 序 言

保險에 대한 意思決定은 확실성하의 의사결정이
기 보다는 不確實성하의 意思決定이다. 여기에서
사용되는 불확실성의 개념은 미래상태에 관한 완
전한 無知뿐만 아니라 부분적 무지까지도 포괄하
여 지칭하고 있다. 이 때문에 不確實성과 危險은
구분되지 않고 서로 교환되어 사용된다. 그러나
완전한 무지의 불확실성은 현실에 존재하지 않는
추상화된 개념이기 때문에 여기에서 사용하는 불
확실성과 위험의 용어는 모두 部分的 知識과 部分的
的 無知를 의미한다.¹⁾

불확실성하에서 의사결정자의 선택행동을 규정
하는 요소로서 代案(alternatives), 狀態(state of
the nature), 展望(prospect)의 세가지를 들 수 있
다. 代案은 의사결정자가 선택할 수 있는 行動指
針으로서 의사결정문제에 있어서의 기회를 의미한
다. 狀態란 미래의 결과가 발생하도록 하는 환경
또는 여건을 이루고 있는 서로 구분될 수 있는 事
象(event)이다. 展望은 대안과 상태의 조합으로부

1) 불확실성과 위험을 구분하여 사용할 수도 있다. 정홍주, "합리적 의사결정과 보험수요", 「보험조사월보」, 보험감독
원, 1993.7, p. 15

터 얻어지는 가능한 結果의 集合이다. 상태에 대한 확률분포를 아는 경우 특정한 대안의 가능한 결과인 전망 역시 狀態의 確率分布와 동일한 확률분포를 갖는다. 불확실성하에서 의사결정이란 여러개의 대안들 중에서 하나(또는 그 이상)의 대안을 선택하는 과정이고 이는 다시 말하면 여러개의 확률분포들 가운데서 하나(또는 그 이상)의 確率分布를 선택하는 과정으로 볼 수 있다.

保險數理學에서 주로 사용하는 의사결정의 기준은 期待値의 假說이다. 생명보험이나 손해보험이나 모두 保險料 計算의 原理는 보험회사의 未來 支給金額이라는 확률변수의 기대치를 구하여 이를 純保險料로 책정하고 이에 적절한 附加保險料를 추가로 부과한다.

보험에 관한 의사결정을 하는 사람의 입장에서 期待値의 假說도 의사결정기준이 될 수 있으나 이 가설로는 보험에 관한 의사결정자의 행동을 설명하지 못하는 부분이 생긴다. 즉 보험계약자가 純保險料 以上の 保險料를 납입하면서 보험에 가입하는 행위 같은 것은 기대치가 보험에 관한 意思決定基準으로 항상 사용될 수 없는 것을 보여준다.

이와 같은 문제에 대한 接近方法으로 본고에서는 기대치의 가설과 기대효용의 가설을 설명하고 損害額分布가 주어진 경우 이를 保險料에 연관시켜 보험에 관한 意思決定者의 行動을 고찰하고자 한다.

II. 純保險料와 期待値의 假說

1. 期待値의 假說

어떤 사람 A가 여러가지 保險商品에서 어느 상

품을 선택할 것인가라는 문제나 A가 危險管理 目的으로 보험을 구입할 것인가 혹은 損失防止에 비용을 투자할 것인가라는 문제 등 어떤 불확실성하에서의 의사결정 방법에 대하여 고찰해 보자. 먼저 期待値의 假說을 고찰해 본다.

기대치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$EV_j = \sum_i P_i X_i \quad (2.1)$$

여기서 EV_j 는 j 대안의 기대치, P_i 는 결과 X_i 가 발생할 확률, X_i 는 금액으로 표시한 결과를 의미한다. 期待値의 假說은 意思決定時 기대치를 기준으로 의사결정을 하는 것을 말한다. 예를 들어 A가 증권투자를 하는 경우 3가지 증권의 수익률과 확률은 다음과 같다.

	收益率	確率	
증권1	0	0.5	$EV_1=10$
	20	0.5	
증권2	5	0.5	$EV_2=10$
	15	0.5	
증권3	6	0.4	$EV_3=10.8$
	14	0.6	

이런 경우 A가 3가지 증권중에서 투자하려는 證券은 증권3이 될 것이다. 기대치의 가설은 기대치를 이용하여 의사결정을 하므로 A의 意思決定基準으로 증권1과 증권2는 무차별하고 증권3은 증권1이나 증권2보다 우월하다.

X를 보험회사에서 지급하는 保險金(전부보험인 경우는 손실)이라고 하면 X의 기대치는 純保險料를 의미한다. 예를 들어 다음해에 A의 집에 화재가 발생하지 않을 확률이 0.75이고 損失의 確率密

度函数가

$$f(x) = 0.25 [0.01 e^{-0.01x}], x > 0 \quad (2.2)$$

라고 하면 이런 보험의 純保險料는 식(2.1)에 의하여

$$\begin{aligned} E(X) &= 0.75(0) + 0.25 \int_0^{\infty} x(0.01e^{-0.01x})dx \\ &= 25 \end{aligned}$$

이 경우 보험계약자 A가 보험료가 25원 이상이면 보험에 가입하지 않고 보험료가 25원보다 작다면 보험에 가입한다고 한다면 A는 기대치에 근거하여 의사결정을 하는 것이다. 이 경우 25원을 보험수리적으로 公正한 保險料(actuarially fair premium)라고 한다.

다음과 같은 두개의 일부보험을 고려해 보자.

- (1) 일부보험 1 : 40원 공제보험
- (2) 일부보험 2 : 손실액의 75%를 보상해 주는 보험

保險契約을 하려고 하는 A의 재산은 520원이며 그 중 120원은 현금으로 400원은 집으로 가지고 있으며 화재로 인한 집의 손실의 확률은 다음과 같다.

$$Pr(X=0) = 0.5$$

$$Pr(X=40) = 0.1$$

$$Pr(X=80) = 0.2$$

$$Pr(X=200) = 0.1$$

$$Pr(X=400) = 0.1$$

이 경우 일부보험1과 2의 보험금지급을 표시하면 <표 2-1>과 같다.

<표 2-1>

保險金の支給

일부보험 1(40원 공제)			일부보험 2(75% 지급)		
확률	손실	보험금	확률	손실	보험금
0.5	0	0	0.5	0	0
0.1	40	0	0.1	40	30
0.2	80	40	0.2	80	60
0.1	200	160	0.1	200	150
0.1	400	360	0.1	400	300
기대치	80	60	기대치	80	60

두개의 보험의 純保險料는 각각 60원이다. 만일 보험자가 두개의 보험의 가격을 90원 (순보험료의 150%)으로 책정하였다고 가정하자. 이 경우 A는 두개의 보험 중 하나를 선택하고자 하면 어느 보험을 선택할 것인가? 기대치를 意思決定의 手段으로 사용하면 일부보험1이나 2나 어느 것을 선택하여도 상관이 없다.

그러나, 실제로는 사람에 따라 일부보험1을 택하는 사람이 있고 또는 일부보험2를 택하는 사람이 있으므로 두개의 대안이 반드시 무차별하지는 않을 수도 있다. 또 보험회사가 순보험료 이상을 보험료로 부과할 때 합리적인 保險契約者의 경우에도 그 보험을 구입하는 경우 이것을 期待値의 假說로는 설명할 수 없다.

2. 세인트 피터스버그의 逆說(St. Petersburg Paradox)

다음과 같은 동전던지기 게임을 고려해 보자. “만약 어떤 사람이 동전던지기를 시행하여 첫번째 던지기에서 앞면이 나오면 2원을 받고 두번째 던지기에서 앞면이 나오면 4원을 그리고 3번째 던지기에서 앞면이 나오면 8원을 받는 식의 게임을 한

다. 앞면이 나오면 게임은 끝나고 뒷면이 나오면 앞면이 나올 때까지 게임은 계속된다. 이 게임의 期待値는 얼마인가?”

이와 같은 게임에서 n 번째 던지기에서 비로소 앞면이 나왔다면 상금은 2^n 이 될 것이며 이를 표로 표시하면 다음과 같다.

(표 2-2) 세인트 피터스버그의 逆說

동전던지는 회수	상금	확률	결과를 위한 실험
1	2	1/2	H
2	2^2	$(1/2)^2$	TH
3	2^3	$(1/2)^3$	TTH
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
n	2^n	$(1/2)^n$	$TT \cdots [(n-1)] \cdot H$

이 게임의 期待値(기대수익)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 EV &= \sum P_i X_i \\
 &= 2(1/2) + 2^2(1/2)^2 + 2^3(1/2)^3 \\
 &\quad + \cdots + 2^n(1/2)^n + \cdots \\
 &= 1 + 1 + 1 + \cdots \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

즉, 期待收益의 假說에 따르면 이 게임을 실시하는 사람은 이 기회를 얻고자 어떤 금액이라도 반대급부로 지급하여야 한다. 그러나 합리적인 사람들은 이 게임에 대하여 보통 2,3원, 많아도 8원 이상은 지급하지 않는다. 이와 같은 모순을 세인트 피터스버그의 역설이라고 하며 이는 意思決定時 危險이 고려되지 않았기 때문에 발생한다.

III. 期待效用

1. 效用과 期待效用

效用이란 일반적으로 選好指數(preference index)를 의미하며 어떤 불확실한 대안으로부터 얻어지는 가능한 각 결과들에 대하여 效用이라는 선호의 지수(가중치)를 부여할 수 있다면 그 경우 각 대안의 確率分布는 가능한 결과의 확률분포가 아니라 가능한 효용의 확률분포라고 할 수 있다.

이 때에 부여된 選好의 指數는 가능한 결과의 크기와 언제나 비례하는 것은 아니다. 예를 들면 어떤 재화 100만원에 부여된 효용이 0.5라고 할 때 200만원에 부여되는 효용이 반드시 1.0일 필요는 없다. 또 이 효용은 개인에 따라서 달라지기 때문에 어떤 재화 100만원에 부여된 효용이 다른 사람에게 1.0이 될 수 있다. 따라서 효용의 크기는 개인의 선호의 태도에 의하여 결정된다.

不確實性下의 意思決定原理에서 기대치의 가설은 위험을 고려하지 않았다는 점 때문에 그 약점이 있으며 이러한 기대치의 가설의 문제점을 보완한 것이 期待效用(expected utility)의 假說로서 폰 노이만과 모겐스텐(J. von Neuman and O. Morgenstern)은 그들의 저서 「게임과 경제행동의 이론 (Theory of Games and Economic Behavior)」에서 선택행동에 적용되는 공리의 체계를 확립함으로써 오늘날 效用理論을 구축하게 된 결정적인 계기를 제공하였다.

期待效用은 각 대안의 가능한 결과에 대하여 부여된 효용의 기대치이며 기대효용이 의사결정의 기준으로 이용된다. 즉 기대효용이 가장 큰 대안을 선택하는 것이 期待效用 極大化에 의한 의사결

정이다.

2. 공리(axiom)의 體系

不確實性下에서 合理的 選擇의 理論을 전개하기 위해서는 個人의 行動을 적절하게 표시하면서도 어느 누구에게나 합리적으로 수용될 수 있는 몇가지 가정을 설정하는 것이 필요하다.

기수적 효용(cardinal utility)의 공리로 알려진 이들 가정은 일괄적이고 합리적인 행동에서 요구되는 最小限의 必要條件을 제공한다.

(1) [공리 I] 비교가능성(comparability)

모든 개인은 여러 선택의 대안중에서 선호의 체계를 갖는다. 즉, x 와 y 두 결과중에서 하나만을 선택해야 될 문제에 직면할 때 어떤 개인은 결과 y 보다 x 를 선호하거나 ($x > y$), 결과 x 보다 y 를 선호하거나 ($y > x$), 또는 결과 x 와 y 에 대하여 무차별하다($x \sim y$).

(2) [공리 II] 이행성(transitivity)

만일 $x > y$ 이고 $y > z$ 이면 $x > z$ 이다.

(3) [공리 III] 강한 독립성(strong independence)

어떤 개인이 결과 x 를 얻을 확률이 α 이고 결과 z 를 얻을 확률이 $1-\alpha$ 인 하나의 잼블을 구성한다고 하자. 이 잼블을 $G(x, z : \alpha)$ 로서 표시하기로 하자.

어떤 개인이 x 와 y 에 대하여 무차별하다면 그는 역시 x 를 얻을 확률이 α 이고 상호배타적 결과 z 를 얻을 확률이 $1-\alpha$ 인 첫번째 잼블과 결과 y 를 얻을 확률이 α 이고 동일한 상호배타적 결과 z 를 얻을 확률이 $1-\alpha$ 인 두번째 잼블에 대하여 무차별할 것이다.

즉 만일 $x \sim y$ 이면 $G(x, z : \alpha) \sim G(y, z : \alpha)$ 이

다.

(4) [공리 IV] 측정가능성(measurability)

만일 $x > y \geq z$ 또는 $x \geq y > z$ 이면, $y \sim G(x, z : \alpha)$ 이기 위한 유일한 α 가 존재한다.

(5) [공리 V] 서열성(ranking)

만일 $x \geq y \geq z$ 그리고 $x \geq u \geq z$ 이고, 또한 $y \sim G(x, z : \alpha_1)$, 그리고 $u \sim G(x, z : \alpha_2)$ 이면, $\alpha_1 > \alpha_2$ 인 경우 $y > u$ 이고 $\alpha_1 = \alpha_2$ 인 경우 $y \sim u$ 이다.

지금까지의 5가지의 공리외에도 개인은 언제나 적은 것보다 많은 富를 선호한다는 가정을 추가한다. 따라서 富의 限界効用은 언제나 正(+)의 값을 갖는다.

공리 IV는 確實性等價의 存在(certainty equivalent)라고도 한다. 이 공리는 미래수익(富)의 확률 분포나 불확실한 대안에 대하여 어떤 單一價格이 존재할 수 있으며 그 가격은 確實性等價와 같은 것이라는 것을 의미하는 매우 중요한 공리이다.

3. 效用函數

效用函數는 다음과 같은 두가지 속성을 갖는다. 첫째, 효용함수는 選好順位를 유지하는 함수(order preserving)이다. 즉, x 의 효용이 y 의 효용보다 더 큰 것으로 측정된다면($U(x) > U(y)$) 이는 x 가 y 보다 더 선호된다($x > y$)는 사실을 의미한다. 둘째, 期待効用을 이용함으로써 여러 위험대안 조합의 서열을 결정할 수 있다.

수리적으로 이는

$$U[G(x, y : \alpha)] = \alpha U(x) + (1-\alpha) U(y) \quad (3.1)$$

로 나타낼 수 있다.

効用函數가 選好順位를 유지하는 함수라는 사실을 증명하여 보자.

만일, $a > x \geq b$ 또는 $a \geq x > b$

그리고 $a > y \geq b$ 또는 $a \geq y > b$ 이면

공리 IV(측정가능성)을 이용하면 다음과 같은 게임을 구성하기 위하여 x 와 y 에 대한 유일한 확률을 결정할 수 있다.

$$x \sim G(a, b; \alpha(x)), y \sim G(a, b; \alpha(y))$$

공리 V(서열성)를 이용하면 확률 $\alpha(x)$ 와 $\alpha(y)$ 를 x 와 y 의 서열을 결정하는 基數的 効用으로 해석할 수 있다. 공리 V에 의하여,

만일 $\alpha(x) > \alpha(y)$ 이면 $x > y$ 이다.

만일 $\alpha(x) = \alpha(y)$ 이면 $x \sim y$ 이다.

만일 $\alpha(x) < \alpha(y)$ 이면 $x < y$ 이다.

이제 앞의 결과들을 이용하여 期待効用에 대하여 고찰해 본다.

最大成課 a 와 最小成課 b 에 임의의 수치를 부여하여 단순한 게임을 구성함으로써 중간성과 x 와 y 에 기수적 효용을 부여할 수 있다.

또 세번째 대안 $z(y < z < x)$ 를 고려하면 공리 IV에 의하여 결과 Z 와, 결과 x 및 y 를 내용으로 하는 하나의 게임을 무차별하게 하는 유일한 확률 $\beta(z)$ 가 존재하는 것을 알 수 있다. Z 를 a 와 b 에 관련시키면,

$$Z \sim G[a, b; \beta(Z)\alpha(x) + (1-\beta(Z))\alpha(y)]$$

와 같이 쓸 수 있다. $U(x) = \alpha(x)$, $U(y) = \alpha(y)$ 로 나타낼 수 있으므로

$$Z \sim G[a, b; \beta(z)U(x) + (1-\beta(z))U(y)]$$

와 같으며 공리 IV와 공리 V를 이용하면,

$$U(z) = \beta(z)U(x) + (1-\beta(z))U(y) \quad (3.2)$$

를 얻을 수 있다. 식 (3.2)는 Z 의 효용은 x 의 확률에 x 의 효용을 곱한 것과 y 의 확률에 y 의 효용을 곱한 값의 합이라는 것을 의미한다. 이것은 성과의 효용에 대한 하나의 線形結合으로 기대효용을 의미한다. 일반적으로 期待効用은

$$E[U(W)] = \sum_i P_i U(W_i) \quad (3.3)$$

와 같이 나타낼 수 있다(W 는 부의 정도).

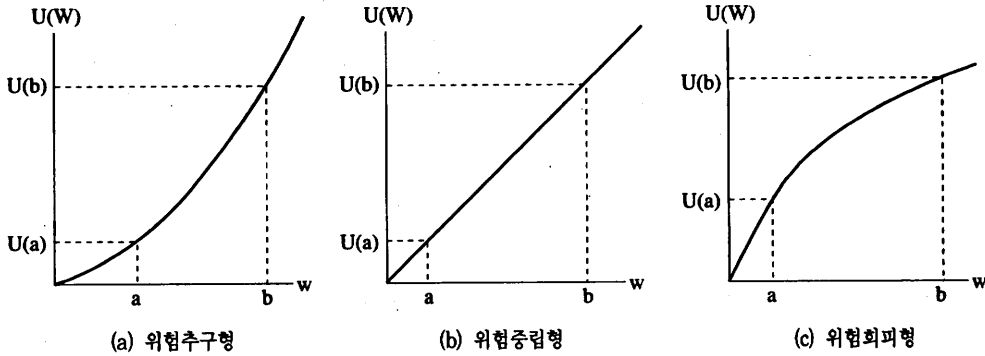
4. 危險回避에 대한 定義

개인의 행동에서 발견할 수 있는 현상은 적은 富보다는 많은 부를 선호한다는 것이다. 따라서 効用函數는 수익에 대한 增加函數의 형태를 갖게 된다. 즉 부의 한계효용이 정(+의 값을 갖는다 ($MU(W) > 0$)).

효용함수는 3가지 형태로 나타낼 수 있는데 그 형태는 〈그림 3-1〉과 같다. 두개의 예상치 a 와 b 를 갖는 게임에서 예상치 a 를 얻을 확률이 α 이고 예상치 b 를 얻을 확률이 $1-\alpha$ 라고 가정하면 이와같은 게임은 $G(a, b; \alpha)$ 로 표시할 수 있다. 이와같은 경우에 게임이 갖는 기대값(기대화페가치)을 확실하게 갖는 대안과 아니면 게임 그 자체 중에서 어느 것을 선택하느냐에 따라 〈그림 3-1〉과 같은 여러 형태로 구분된다. 예를 들면 확실한 10원을 얻는 게임에서 만일 개인이 게임을 선택한다면 그는 危險追求型(risk lover)이며 확실한 10원을 선택한다면 그는 危險回避型(risk aver-

〈그림 3-1〉

效用函數의 形態



ter)이며 확실한 10원과 갬블이 무차별하다면 그는 危險中立型(risk neutral)이다.

危險回避性에 대한 3가지 정의를 달리 표현하면 다음과 같다.

만일 $U[E(W)] > E[U(W)]$ 이면 위험회피적이다.

만일 $U[E(W)] = E[U(W)]$ 이면 위험중립적이다.

만일 $U[E(W)] < E[U(W)]$ 이면 위험추구적이다.

또 〈그림 3-1〉에서 알 수 있듯이 어떤 개인의 效用函數가 오목하다(concave)면 그는 위험회피형이고 效用函數가 선형적(linear)이라면 그는 위험중립형이며 效用函數가 볼록하다(convex)면 그는 위험선호형일 것이다. 앞에서 이미 언급이 되었지만 부가 증가하면 총효용은 증가한다. 즉 $U'(W) > 0$ 이다. 그런데 그 증가속도에 따라 위험선호도의 분류가 가능한데 $U''(W) > 0$ 일 때는 위험선호형, $U''(W) = 0$ 이면 위험중립형, $U''(W) < 0$ 이면 위험회피형을 의미하게 되는 것이다.

期待效用理論이란 개인이 두개의 불확실한 대안

에 대하여 무차별이라면 각 대안으로 부터 기대효용의 크기가 같아야 됨을 의미한다.

確實性等價(certainty equivalent)는 불확실한 대안과 무차별하게 교환될 수 있는 확실한 결과로 정의될 수 있다. 다시 말하면 두 대안 중 하나가 확실하게 실현될 금액을 표시한다면 그 금액이 바로 다른 불확실한 대안의 확실성등가가 될 것이다 (공리 IV 참조).

어떤 개인이 갬블을 피하기 위하여 포기하고자 하는 기대 부(기대화폐가치)를 초과하는 最大額을 계산하는 것도 가능한데 이를 위험프리미엄(risk premium)라고 한다. 위험프리미엄의 측정은 특정 대안의 기대 부(기대 화폐가치)와 확실성등가의 차이로 구할 수 있다.

IV. 損害額分布

損害額의 分布는 개별적인 경우마다 과거자료를 이용하여 구할 수도 있지만 여기서는 대표적인 이론적인 분포(theoretical distribution)에 대하여 고찰한다.

1. 로그정규분포(The Log-normal distribution)

이 분포는 손해액 분포가 오른쪽으로 치우쳐져 있을 때 유용한 분포이며 손해액은 0부터 무한대까지의 범위이다.

확률변수 $Y = \ln X$ 가 平均 μ 와 標準偏差 σ 인 定規分布를 갖는다면 확률변수 X 는 모수가 μ 와 σ 인 로그정규분포(log-normal distribution)를 갖는다. 로그정규분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad x > 0$$

X 의 期待값과 分散은 다음과 같다.

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$Var(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1]$$

2. 파레토분포(The Pareto distribution)

파레토분포는 로그정규분포보다 꼬리부분이 두껍다. 따라서 再保險에서 대형사고가 일어날 가능성을 예측하는데 쓰일 수 있다.

X 가 파레토분포를 할 때 X 의 確率密度函數 $f(x)$ 와 分布函數(distribution function) $F(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x} \right)^{\alpha+1} \quad (x > \beta)$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x} \right)^{\alpha} \quad (x > \beta)$$

X 의 期待값과 分散은 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \right)^2 \\ = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

3. 감마분포(The Gamma distribution)

감마분포는 異質的인 危險의 分布分析 등 손해액분포에서 자주 사용된다. X 가 감마분포를 하면 X 의 確率密度函數는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} (\beta x)^{\alpha-1},$$

$$\alpha, \beta > 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

감마분포는 대칭이 아니지만 α 가 증가함에 따라 비대칭이 점점 대칭으로 변화한다.

$Y = \sum_{i=1}^n X_i$ 이고 X_i 가 각각 위식의 분포를 따른다면 Y 는 모수가 $n\alpha$ 와 β 인 감마분포를 따른다. 또 X 가 모수가 α 와 β 인 감마분포를 하고 α 가 크면 X 는 평균이 α/β 분산이 α/β^2 인 近似的 正規分布를 따른다. 즉

$$\frac{X - (\alpha/\beta)}{\sqrt{\alpha/\beta^2}}$$

은 $N(0, 1)$ 이다.

X 가 모수가 $\alpha=1$ 과 β 인 감마분포이면 X 는 지수분포를 한다. X 가 지수분포(exponential distribution)를 할 때 確率密度函數는 다음과 같다.

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad \beta > 0, \quad x > 0$$

X 의 기대값과 분산은 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{1}{\beta}, \text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

지수분포는 앞으로 이론을 전개하는데 많이 사용될 분포이다.

V. 危險프리미엄과 保險意思決定

1. 保險과 期待效用

期待效用의 假說은 보험에 대하여도 적용될 수 있다. 어떤 사람 A 는 가옥에 대한 火災保險에 가입하려고 한다. A 의 부의 총액은 625원이고 그 중에서 가옥의 가치는 525원이다. A 의 집은 화재로 인하여 소실될 수도 있고 소실되지 않을 수도 있다. 가장 간단한 경우로 화재로 인한 손실은 손전(total loss)만을 가정한다. 화재가 발생할 확률은 0.25라고 가정하자. A 의 효용함수는 식 (5.1)과 같다.

$$U(W) = \sqrt{W} \quad (5.1)$$

A 의 최종 부는 화재가 발생하지 않은 경우는 625원이고 화재가 발생한 경우는 100원이며 각각의 확률은 0.75와 0.25이다. 보험에 가입하지 않은 경우의 期待效用은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} EU_{NI} &= 0.75 U(625) + 0.25 U(100) \\ &= 21.25 \end{aligned} \quad (5.2)$$

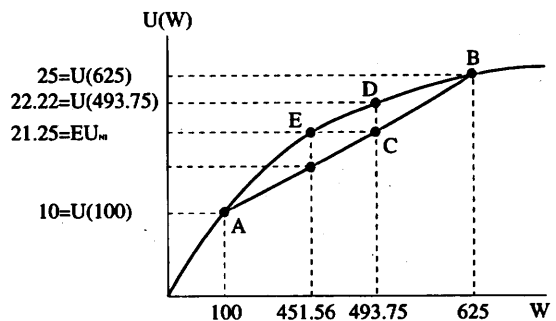
이제 보험에 가입하는 경우를 고려해 본다. 제2장에서 고찰한 損失의 期待値는

$$EV = 0.25 (525) = 131.25 \quad (5.3)$$

식 (5.3)은 손실의 기대치로 보험계약에 대한 損失의 保險數理的 價値이며 純保險料라고 생각할 수 있다.

보험회사가 보험료를 $E=131.25$ 로 하면 A 는 보험에 가입할 것인가라는 문제를 고려해 보자. 〈그림 5-1〉은 A 의 효용함수로 危險回避型의 效用函數를 나타낸다.

〈그림 5-1〉



〈그림 5-1〉의 x 축은 A 의 최종 부를 나타내며, y 축은 그에 따른 효용을 나타낸다. A 가 보험에 가입하지 않은 경우 A 의 가능한 최종 부는 625원이나 100원이다. A 가 보험에 가입한 경우 보험료로 131.25원을 보험회사에 납입하는 대신에 A 는 화재로 인한 부의 損失可能性을 제거하는 것이다. 따라서 보험에 가입한 경우 A 의 최종 부는 항상 $625 - 131.25 = 493.75$ 원이 되며 이 경우 期待效用은

$$EU_I = 1.0 U(493.75) = 22.22 \quad (5.4)$$

〈그림 5-1〉이나 식 (5.2)와 (5.4)에서 알 수

있듯이 A의 경우(위험회피형) 보험에 가입한 경우의 期待効用이 보험에 가입하지 않은 기대효용보다 크다. 〈그림 5-1〉과 같이 효용함수가 오목하면(concave) 보험에 가입하지 않은 경우의 기대효용의 값을 x 축으로 연장한 점 C는 보험에 가입한 경우의 최종 부의 효용인 점 D보다 항상 밑에 위치하게 된다.

어떤 사람 B는 위험에 대한 태도가 危險選好型이라고 가정하자.

B의 効用函數는 다음과 같다.

$$U(W) = \frac{1}{10,000} W \quad (5.5)$$

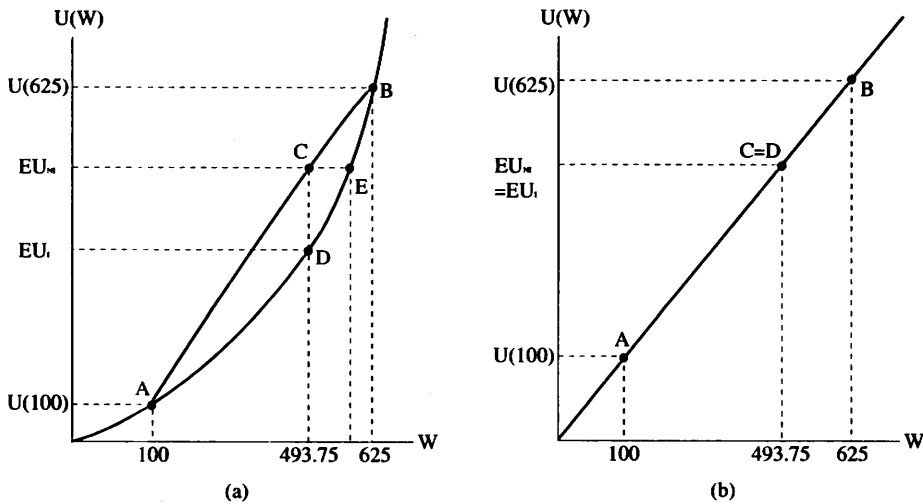
이 경우 EU_{NI} 와 EU_I 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} EU_{NI} &= 0.75 U(625) + 0.25 U(100) \\ &= 39.31 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$EU_I = 1.0 U(493.75) = 24.38 \quad (5.7)$$

식 (5.6)과 (5.7)의 결과는 〈그림 5-2〉의 (a)에 나타나 있으며 B는 493.75원의 純保險料로는 보험에 가입하지 않으려 할 것이다.

〈그림 5-2〉



어떤 사람 C의 효용함수가 〈그림 5-2〉의 (b)처럼 주어졌을 경우 보험에 가입하지 않을 때의 기대효용과 보험에 가입할 때의 기대효용이 같음을 알 수 있다. 따라서 위험중립적인 C는 보험에 관한 의사결정을 期待値의 假說에 의하여 할 수 있으며 위험 그 자체는 고려의 대상이 되지 않는

다.

지금까지 살펴본 이론의 적용은 全損을 가정했을 경우만 성립하는 것은 아니며 조금 더 一般化시킬 수 있다. 예를 들면 A의 가옥이 화재가 날 확률이 0.25, 화재가 나지 않을 확률이 0.75이며 손실의 분포는 (0, 525)의 均等分布를 한다고 가

정하자. 이 경우 손실액 x 의 分布函數는

$$f(x) = \frac{25}{52,500}, \quad 0 < x < 525$$

와 같다. A 의 効用函數가 식 (5.1)과 같다면 보험에 가입하지 않은 경우의 期待損失은

$$\begin{aligned} E(X) &= 0.75(0) + \int_0^{525} \frac{25}{52,500} x \, dx \\ &= 65.63 \end{aligned} \quad (5.8)$$

이며 보험에 가입하지 않은 경우의 期待効用은

$$\begin{aligned} EU_{NI} &= 0.75 U(625) \\ &+ \int_0^{525} U(625-x) f(x) dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

를 계산한 값이 된다.

2. 危險프리미엄(Risk Premium)

損失額의 기대값을 純保險料라고 정의하고 보험에 가입할 것인가의 의사결정에 대하여 고찰하였다. 그러나 보험시장이 完全競爭市場이라고 하더라도 실제 형성되는 보험상품의 가격은 純保險料보다는 높을 것이다. 이는 보험자의 이윤이 배제된다 하더라도 보험산업에 종사하는 종업원의 급여나 보험상품 판매에 수반되는 제반비용은 현실적으로 고려되어야만 하기 때문이다. 이와 같은 현실적인 保險料와 期待効用에 대하여 고찰해 본다.

〈그림 5-1〉의 A 의 効用함수를 다시 고찰해 보자. 어느 보험회사에서 앞에서 설명된 火災保險의 보험료를 131.25원(이 경우 A 의 최종 부는 493.75) 대신에 150원을 부과하였다고 가정하자(이

경우 부가보험료는 $150 - 131.25 = 18.75$ 원이다). 이 경우 A 의 최종 부는 $625 - 150 = 475$ 원이며 A 가 보험에 가입함으로써 얻는 기대효용은 $U(475) = 21.79$ 임을 알 수 있다. $U(475)$ 는 〈그림 5-1〉에서 알 수 있듯이 $U(493.75)$ 와 EU_{NI} 의 사이에 있으므로 A 는 보험료가 150원인 경우에도 보험에 가입하고자 할 것이다. 보험료가 173.44원인 경우 A 의 최종 부는 451.56원이므로 보험에 가입하지 않을 경우의 기대효용과 보험에 가입하는 경우의 기대효용이 같다. 따라서 保險料가 173.44원보다 낮을 경우 A 는 보험에 가입할 것이며 173.44원보다 높을 경우 A 는 보험에 가입하지 않을 것이다.

이와 같은 관점에서 위험회피형의 사람은 損失의 期待値(순보험료)이상의 보험료를 기꺼이 납입하고 위험을 제거하려고 노력하는 것을 알 수 있다. A 가 기꺼이 납입하고자 하는 純保險料의 超過分의 最大值를 위험프리미엄(risk premium)이라고 한다. 위험프리미엄을 3장에서 고찰한 바에 따르면 ‘부의 기대치-확실성등가’로 정의할 수 있다.

$$\text{위험프리미엄} = \text{부의기대치} - \text{확실성등가} \quad (5.10)$$

〈그림 5-1〉의 경우 식 (5.10)을 이용하면 위험프리미엄은 $493.75 - 451.56 = 42.19$ 원임을 알 수 있다.

A 가 위험을 제거하기 위하여 위험프리미엄을 제공하면서까지 보험에 가입하려고 하는 것은 A 가 위험회피형의 사람이기 때문이며 危險回避의 정도가 심할수록 위험프리미엄의 값은 커진다.

위험프리미엄의 값은 사람에 따라 달라지므로 보험회사에서 책정한 危險保險料가 어떤 사람에게

는 보험에 가입하지 못할 정도로 높게 느껴질 수도 있지만 어떤 사람에게는 그렇지 않을 수도 있다. 각 개인 i 가 다음의 조건을 만족시키면 개인 i 는 보험에 가입할 것이다.

$$P - E(X) < RP_i \quad (5.11)$$

여기서 P 는 영업보험료, $E(X)$ 는 손실의 기대치, RP_i 는 개인 i 의 위험프리미엄이다. 식 (5.11)의 좌변은 附加保險料를 나타내며 책정한 보험료와 손실의 분포가 주어지면 구할 수 있다. 그러나 RP_i 는 개인에 따라 달라지는 주관적인 것이다.

全損만을 가정한 경우보다 일반적인 예를 고찰해 보자. A 의 가옥이 화재가 날 확률이 0.25, 화재가 나지 않을 확률이 0.75이며 손실의 분포는 (0, 525)의 均等分布를 한다고 가정할 때 위험프리미엄을 구해보자. 식 (5.8)과 (5.9)를 이용하면 위험프리미엄은 다음 식을 만족하여야 한다.

$$U(625 - 131.25 - RP) = 0.75 U(625) + \int_0^{525} U(625 - x) f(x) dx \quad (5.12)$$

이제 이와 같은 논의를 일반화시켜 보자.

어떤 개인의 현재의 부를 W^* (W^* 는 상당히 큰 금액으로 가정, 따라서 논의의 편의상 ∞ 로 가정한다.²⁾)라고 하고 損失額을 X , 지불할 의사가 있는 最大の 保險料를 H 라고 할 때 H 를 구해본다.

지금까지의 논의를 종합하면 구하는 H 는 다음 식을 만족하는 H 이다.

$$U(W - H) = E[U(W - X)] \quad (5.13)$$

테일러의 정리를 이용하면 다음 식이 성립한다 (μ_1 은 μ 와 W 사이의 값).

$$U(W) = U(\mu) + (W - \mu)U'(\mu) + \frac{(W - \mu)^2}{2} U''(\mu_1) \quad (5.14)$$

따라서

$$E[U(W)] = U(\mu) + \frac{Var(W)}{2} U''(\mu_1) \quad (5.15)$$

保險意思決定者の 위험에 대한 선호가 危險回避型의 경우는 $U'(W) > 0, U''(W) < 0$ 이다.

意思決定者が 危險回避型인 경우 다음 식이 성립한다.³⁾

$$U(W - H) = E[U(W - X)] \leq U(W - \mu) \quad (5.16)$$

$U'(W) > 0$ 이므로 $U(W)$ 는 증가함수이며 이는 $W - H \leq W - \mu$ 를 의미한다(즉 $H \geq \mu$).

만일 意思決定者が 危險選好型인 경우는 $U'(W) > 0, U''(W) > 0$ 이므로

$$U(W - H) = E[U(W - X)] \geq U(W - \mu) \quad (5.17)$$

이 성립한다. 이 경우 $U'(W) > 0$ 이므로 $W - H \geq W - \mu$ 이다(즉 $\mu \geq H$).

다음의 두 식을 이용하여 H 의 근사치를 구해본다.

$$U(W - H) \approx U(W - \mu) + (\mu - H)U'(W - \mu) \quad (5.18)$$

2) 실제로 W^* 가 상당히 큰 경우 W^* 를 ∞ 로 대치하여도 결과값은 거의 같다.

3) 이와 같은 식을 쥘센의 부등식(Jensen's inequality)라고 한다.

$$U(W-x) \approx U(W-\mu) + (\mu-x)U'(W-\mu) + \frac{1}{2}(\mu-x)^2 U''(W-\mu) \quad (5.19)$$

식(5.18), (5.19)와 식(5.13)을 이용하면 H 의 근사치는 다음과 같다.

$$H \approx \mu - \frac{1}{2} \frac{U''(W-\mu)}{U'(W-\mu)} \text{Var}(X) \quad (5.20)$$

効用函數와 損害額分布가 주어지는 경우 H 의 값을 구해본다. 의사결정자의 효용함수가 다음과 같은 指數函數라고 가정하자.

$$U(W) = -e^{-aW}, \quad a > 0 \quad (5.21)$$

$$U'(W) = ae^{-aW} > 0, \quad U''(W) = -a^2 e^{-aW} < 0$$

이므로 이 의사결정자는 위험회피형의 사람이다. 이 경우 이 사람이 보험에 가입하고자 하는 물건의 손실액의 確率密度函數가 다음과 같이 주어졌다고 하자 이 물건이 손실을 입지 않은 확률은 0.75라고 가정하자.

$$f(x) = 0.25 \beta e^{-\beta x}, \quad x > 0 \quad (5.22)$$

이 경우 損失額의 期待값은

$$E(X) = 0.75(0) + 0.25 \int_0^{\infty} x(\beta e^{-\beta x}) dx \quad (5.23)$$

$$= \frac{0.25}{\beta} \quad (5.24)$$

이 되며 이 사람이 지불할 의사가 있는 최대의 보험료 H 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U(W-H) = 0.75U(W) + \int_0^{\infty} U(W-x)f(x)dx \quad (5.25)$$

식(5.25)를 정리하면 다음을 얻는다.

$$H = \frac{\log \left\{ 0.75 + 0.25 \frac{\beta}{(\beta-a)} \right\}}{a} \quad (5.26)$$

이 의사결정자가 손실액의 기대값 이상으로 지불하려고 하는 최대의 값은 식(5.26)에서 식(5.24)를 차감한 값이다.

意思決定者의 効用函數가 (5.21)과 같이 주어지고 손실액의 분포가 자유도 n 인 카이제곱(χ^2)분포를 한다고 가정하자($0 < a < 1/2$).

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0 \quad (5.27)$$

이 경우 의사결정자가 지불하고자 하는 최대의 보험료 H 는 다음을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} -e^{-a(W^*-H)} &= \int_0^{\infty} -e^{-a(W^*-x)} f(x)dx \\ e^{aH} &= \int_0^{\infty} e^{ax} f(x)dx \\ &= (1-2a)^{-\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (5.28)$$

따라서 H 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H &= -\frac{n}{2a} \log(1-2a) \\ &= \frac{n}{2a} \left\{ 2a + \frac{(2a)^2}{2} + \frac{(2a)^3}{3} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

식 (5.29)로 부터

$$H > n = E(X) \quad (5.30)$$

3. 保險商品の 選擇

期待効用の 假說은 보험계약자가 여러 보험상품 중에서 자기에게 가장 큰 効用을 제공하는 상품을 선택하는 경우에도 적용될 수 있다.

예를 들어 어떤 사람 D가 520의 부를 가지고 있으며 120원은 현금으로 나머지는 집으로 가지고 있다고 가정하자. 損失의 可能性은 다음과 같다.

$$Pr(X=0)=0.5$$

$$Pr(X=40)=0.1$$

$$Pr(X=80)=0.2$$

$$Pr(X=200)=0.1$$

$$Pr(X=400)=0.1$$

다음 두가지 保險商品을 고려하자

(1) 일부보험1 : 공제액이 40원인 보험

(2) 일부보험2 : 손실액의 75%를 지급하는 보험

이와 같은 경우 D는 위의 두 보험중에서 어느 보험을 선호할 것인가라는 문제를 고찰해 보자. D의 효용함수는 다음과 같다.

$$U(W) = \log W \quad (5.31)$$

각각의 경우 최종 부는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\text{최종 부} = 520 - \text{보험료} - \text{손실} + \text{보험금} \quad (5.32)$$

각각의 경우 保險金の 기대치는 60원이며 營業保險料를 순보험료의 150%로 한 경우 각각의 영업보험료는 90원이다. 각각의 경우 보험료가 주어졌으므로 식 (5.32)를 이용하여 최종 부를 구하면 <표 5-1>과 같다.

<표 5-1> 保險商品の 比較

확 률	일부보험1 (40원 공제)			일부보험2 (75% 지급)	
	손실	보험금	최종 부	보험금	최종 부
0.5	0	0	430	0	430
0.1	40	0	390	30	420
0.2	80	40	390	60	410
0.1	200	160	390	150	380
0.1	400	360	390	300	330
기대치	80	60	410	60	410

期待効用을 구하면

(1) 일부보험1의 경우

$$\begin{aligned} EU_1 &= 0.5(\log 430) + 0.5(\log 390) \\ &= 6.015 \end{aligned}$$

(2) 일부보험2의 경우

$$\begin{aligned} EU_2 &= 0.5(\log 430) + 0.1(\log 420) + 0.2 \\ &\quad (\log 410) + 0.1(\log 380) + 0.1(\log 330) \\ &= 6.013 \end{aligned}$$

두개의 보험의 期待効用을 비교하면 일부보험1이 일부보험2보다 크므로 어떤 사람 D는 일부보험1을 선택하게 된다. 만약 다른 사람에게 다른 効用函數가 주어지면 결과는 달라질 수도 있다.

이제 損害額分布와 効用函數를 이용하여 일반적인 경우를 고찰해 본다. 다음의 3가지 보험을 고려해보자.

보험 1 : 전부보험

보험 2 : 보험자가 손실의 90%를 지급해 주는 Coinsurance(일부보험)

보험 3 : 공제액이 21.07인 일부보험

가치가 W^* 인 어떤 부보물건이 손실이 일어나지 않을 확률은 0.75이며 손해액 분포와 효용함수가

다음과 같다고 하자.

$$f(x) = 0.25[0.005 e^{-0.005x}], \quad 0 < x < W^*$$

$$U(W) = -e^{-0.0025W}$$

각각의 보험의 경우의 保險金支給(claim)의 平均額을 구하여 보자($W^* = 10,000$ 가정).

$$\text{보험 1 : } \int_0^{w^*} x f(x) dx$$

$$= 0.25 \int_0^{w^*} x (0.005 e^{-0.005x}) dx = 50$$

$$\text{보험 2 : } = 0.25 \int_0^{w^*} 0.9x (0.005 e^{-0.005x}) dx = 45$$

$$\begin{aligned} \text{보험 3 : } &= 0.25 \int_{21.07}^{w^*} (x - 21.07) [0.005 e^{-0.005x}] \\ &dx = 45 \end{aligned}$$

이 경우 營業保險料를 純保險料의 150%라고 하면 각각의 경우 期待効用은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{무보험 : } &0.75U(w^*) + \int_0^{w^*} U(w^* - x) f(x) dx \\ &= -1.25 e^{-0.0025w^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{보험 1 : } &0.75U(w^* - 75) + \int_0^{w^*} U(w^* - 75) f(x) dx \\ &= -1.20623 e^{-0.0025w^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{보험 2 : } &0.75U(w^* - 67.5) \\ &+ \int_0^{w^*} U(w^* - 67.5 - 0.1x) f(x) dx \end{aligned}$$

$$= -1.1994 e^{-0.0025w^*}$$

$$\text{보험 3 : } 0.75U(w^* - 67.5)$$

$$+ \int_0^{21.07} U(w^* - 67.5 - x) f(x) dx$$

$$+ \int_{21.07}^{w^*} U(w^* - 67.5) f(x) dx$$

$$= -1.18460 e^{-0.0025w^*}$$

無保險의 期待効用은 보험에 가입하였을 각 경우보다 작다. 또 보험1, 보험2, 보험3 중에서 보험3의 기대효용이 가장 크다. 따라서 의사결정자는 주어진 効用函數와 損害額分布에서 보험3을 선택하게 된다.

4. 問題點

이상에서 살펴본 바와 같이 期待効用의 假說은 보험의 구입이나 이와 유사한 不確實性下에서의 意思決定의 기준으로 유용하게 사용될 수 있다. 그러나 이와 같은 결정을 하기 위해서는 개인의 효용함수에 대한 정확한 정보가 필요하며 이 정보는 효용함수의 개략적인 모양이 아니고 정확한 형태이어야 한다. 효용함수의 정확한 형태를 추정하는 것은 쉬운 작업이 아닐 것이다.

또 의사결정자가 기업인 경우 마치 기업이 개인인 것으로 생각하여 危險回避的 効用函數를 고려하는 것은 문제가 있을 수 있다. 기업은 여러 이해집단의 그룹(예: 주주, 채권자, 관리자, 종업원, 고객 등)으로 이루어져 있으며 각 그룹이 기업에 대하여 청구권들을 가지고 있다. 기업의 의사결정은 이와 같은 청구권들이 기업가치에 영향을 미치는 것을 반영하여야 하기 때문에 期待効用理論은

이와 같은 여러 請求權들의 조정들에 대한 相互關聯性들을 연구하는데는 적당하지 않을 수 있다.

Schoemaker et al.(1979, 1980), Solvic et al. (1977)등은 보험의사결정에 대한 실증적 조사를 하였으며 期待効用理論을 prospect theory와 비교하며 保險意思決定은 일반적으로 기대효용이론보다는 더 복잡한 구조를 갖는 것을 설명하였다.

不確實性下의 意思決定理論으로 기대효용의 가설 외에도 平均分散模型, 確率支配原理 등을 들 수 있으나 그 나름대로의 문제점이 있다.⁴⁾

이러한 문제점이 있음에도 期待効用假說은 의사결정에 포함되는 비용과 급부의 형태를 같이 고려하며 위험에 대한 태도에 상응하는 결과를 유도하는 데서 그 의의가 있다고 하겠다.

VI. 結 言

본고에서는 불확실성하에서 보험에 관한 意思決定基準에 대하여 고찰하였다. 우선 보험수리학적 으로 유용한 期待値의 假說을 순보험료라는 입장에서 정의하고 기대치의 가설이 사용될 수 없는 경우도 고찰하였다.

보험에 관한 의사결정자가 기준으로 할 수 있는 意思決定基準으로 기대효용의 가설을 고찰하였으며 이 가설을 이용하여 확실성등가와 위험프리미엄에 대하여 정의하였다. 기대효용의 가설과 위험프리미엄에 대한 고찰로부터 보험계약자가 순보험료 이상으로 보험료를 지불하는 경우가 있음을 고찰하였다. 損害額分布와 効用函數가 주어지는 경

우 지불할 의사가 있는 최대의 보험료를 수리적으로 구해보았으며 이 보험료(H)와 손해액의 기대값(μ)의 대소를 危險回避型과 危險選好型의 의사결정자로 나누어서 고찰하였다. 위험회피형 의사결정자의 경우는 $H > \mu$ 이며 위험선호형 의사결정자의 경우는 $H < \mu$ 이다. 보험상품의 선택에 대하여도 논의가 전개되었다. 無保險, 全部保險, 보험자가 90%를 지급해주는 一部保險, 공제액이 있는 一部保險의 선택과정에서 손해액분포와 효용함수가 주어진 경우 기대효용을 실제로 계산하여 의사결정기준으로 제시하였다.

期待効用의 假說은 보험에 대한 의사결정이나 불확실성하의 의사결정의 기준으로 사용할 수 있다. 그러나 이와 같은 결정을 하기 위하여는 효용함수의 정확한 형태를 알고 있어야 하며 기업의 경우는 기업이 마치 한 사람인 것으로 생각하여 危險回避的 効用函數를 적용하는데 문제점이 있을 수 있다. 따라서 여러학자들이 기대효용가설에 대한 검증을 실시하고 그 대안들을 제시하기도 하였다. 이러한 문제점이 있음에도 期待効用假說은 의사결정에 포함되는 비용과 급부의 형태를 같이 고려하며 위험에 대한 태도에 상응하는 결과를 유도하는 데서 그 의의가 있다고 하겠다.

이상과 같은 분석에서 알 수 있듯이 保險學이나 保險數理學은 연구방법에 따라서 그 범위를 다른 학문분야에까지 확장시켜 고찰할 수 있으며 그와 같은 노력이 보험학과 보험수리학의 발전을 위하여 반드시 필요할 것으로 생각된다.

4) 홍순구, "손해보험수요에 관한 이론적 고찰", 「보험개발연구」, 1993년 제2호, 보험개발원, p158

參 考 文 獻

- 吳昌洙, 「생명보험수리」, 보험연수원, 1992
- _____, 「최신보험수리학」, 박영사, 1992
- _____, “보험수리학의 확률론적 접근방법에 관한 고찰”, 「보험계리인회지」 제2호, 1992.5
- 정홍주, “합리적 의사결정과 보험수요”, 「보험조사월보」, 1993.7
- 최운열, 「투자론」, 박영사, 1989
- 홍순구, “손해보험수요에 관한 이론적 고찰, 「보험개발연구」, 1993년 제2호
- Arrow.K.J., *Essays in the Theory of Risk-bearing*, North-Holland, Amsterdam, 1971
- _____, “Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care”, *American Economic Review*, Vol. 53, 1963, pp 941-973
- Bowers, N.L., et al., *Actuarial Mathematics*, SOA, 1986
- Copeland, T.E., and Weston, J.F., *Financial Theory and Corporate Policy*, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Co., 1983
- Fama,E.F., and Miller, M.M., *The Theory of Finance*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1972
- Friedman, M., and Savage, L. J., “The Utility Analysis of Choice Involving Risk”, *Journal of Political Economy*, Vol 56, 1948, pp 279-304
- Hershey,J.C. and Paul J.H. Schoemaker, “Risk Taking and Problem Context in the Domain of Losses:An Expected Utility Analysis”, *The Journal of Risk and Insurance*, 47(1980), 111-132
- Schoemaker,P.J.H. and Kunreuther,H.C., “An Experimental Study of Insurance Decisions”, *The Journal of Risk and Insurance*, 46(1979), 603-618
- Slovic,P.,Fischhoff,B.,Lichtenstein,S.,Corrigan,B., and Combs,B., “Preferred for Insuring Against Probable Small Losses :Insurance Implications, “*The Journal of Risk and Insurance*, 44(1977), 237-258
- Varian, H.R., *Microeconomic Analysis*, 2nd ed., W.W.Norton & Co., 1984
- von Neuman, J., and Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1947